

RENDICONTI  
DELLE SEDUTE  
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 novembre 1911.

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni (Gli integrali in forma parametrica).* Nota III di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nelle Note I e II (<sup>(1)</sup>) ho dato una dimostrazione della sufficienza delle condizioni per il minimo degli integrali semplici posti sotto forma non parametrica in cui non faccio uso del concetto di campo. Nella presente Nota ed in un'altra che seguirà tratto della stessa questione per gli integrali posti in forma parametrica; pur mantenendo lo stesso concetto direttivo, si debbono perciò introdurre nei ragionamenti non irrilevanti modificazioni di dettaglio.

Si avrà dunque da trovare quando una curva, che passa per due punti estremi assegnati  $P_1$  e  $P_2$ , rende minimo l'integrale

$$(1) \quad I = \int_{t_1}^{t_2} F(xy; x'y') dt.$$

Supporremo perciò, secondo l'uso,  $F$  positivamente omogenea di primo grado rispetto a  $x'y'$  e di classe  $C''$ ; con  $F_1(xy; x'y')$ ,  $F_2(xy; x'y')$  indicheremo le funzioni che così si indicano ordinariamente e che sono formate rispettivamente, colle derivate seconde e colle seconde e terze di  $F$ ; infine indicheremo con  $M$  il massimo valore assoluto di  $F$  e delle sue derivate

(<sup>1</sup>) Questi Rendiconti, pag. 425 e pag. 466.

dei primi 3 ordini, di  $F_1$ , e delle sue derivate prime, di  $F_2$ , quando  $xy$  resta in un certo campo  $\mathfrak{N}$ , ed  $x'y'$  sono tali che  $x'^2 + y'^2 = 1$  (1).

Dimostreremo che, se la curva  $\hat{\mathcal{C}}$  che riferita all'arco ha le equazioni

$$(2) \quad x = \hat{x}(s), \quad y = \hat{y}(s),$$

e priva di punti multipli, passa per i due punti  $P_1 \equiv (x_1 y_1)$ ,  $P_2 \equiv (x_2 y_2)$ , sia in  $\mathfrak{N}$ , è un estremale per l'integrale (1), ed infine soddisfa alle condizioni seguenti:

$$1^o) \quad F_1(\hat{x}\hat{y}; \hat{x}'\hat{y}') \geq \rho > 0$$

$$2^o) \quad \theta(\hat{x}\hat{y}; \hat{x}'\hat{y}'; x'y') > 0 \text{ quando non sia } 1 - \frac{\hat{x}'x' + \hat{y}'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$$

$$3^o) \quad \text{il punto } x'_1y'_1 \text{ coniugato su } \hat{\mathcal{C}} \text{ di } x_1y_1 \text{ segue } x_2y_2.$$

la curva  $\hat{\mathcal{C}}$  dà ad I il valore minimo rispetto a tutte le curve che passano per  $P_1$  e  $P_2$  e giacciono in un conveniente intorno di  $\hat{\mathcal{C}}$ .

2. Ci occorre anzitutto indicare un modo conveniente di fissare il parametro sulle curve variate di guisa che risulti comodo il confronto dei valori di I per esse e per  $\hat{\mathcal{C}}$ . Osserveremo anzitutto che dalle ipotesi fatte per  $\hat{\mathcal{C}}$  segue che la curvatura di  $\hat{\mathcal{C}}$  è finita: la indicheremo con  $k$  e chiameremo  $x$  il suo massimo valore: sarà  $x \leq \frac{2M}{\mu}$  (2). Avremo

$$(3) \quad \begin{aligned} \hat{x}'^2 + \hat{y}'^2 &= 1; \hat{x}'\hat{x}'' + \hat{y}'\hat{y}'' = 0; \\ \hat{x}'' &= -k\hat{y}', \hat{y}'' = k\hat{x}'; \sqrt{\hat{x}''^2 + \hat{y}''^2} = k. \end{aligned}$$

Indicheremo con  $\hat{P}(s)$  il punto  $\hat{\mathcal{C}}$  di parametro  $s$ , e conteremo l'arco a partire  $P_1$ : sarà, indicando con  $\sigma$  la lunghezza di  $\hat{\mathcal{C}}$ ,  $\hat{P}(0) = P_1$ ,  $\hat{P}(\sigma) = P_2$ .

Alle curve variate  $\mathcal{C}$  imporremo di restare in quella parte  $\mathfrak{N}_1$  di  $\mathfrak{N}$  che soddisfa alla condizione che per ogni punto  $P$  di essa passa una ed una sola normale a  $\hat{\mathcal{C}}$ : poichè  $\hat{\mathcal{C}}$  non ha punti multipli per costruire  $\mathfrak{N}_1$  basta staccare sulle normali a  $\hat{\mathcal{C}}$  da entrambe le parti a partire da  $\hat{\mathcal{C}}$  un segmento  $< \frac{1}{x}$ . Presa poi una qualunque curva  $\mathcal{C}$  di  $\mathfrak{N}_1$  passante per  $P_1$  e

(1) Sono queste le notazioni e le ipotesi di cui fa uso il Bolza nel suo trattato già citato.

(2) Invero l'equazione degli estremali si può scrivere  $k = \frac{F''_{y'x} - F''_{x'y}}{F_1}$ . Cfr. Bolza, loc. cit., pag. 203, formula (23).

$P_2$ , chiameremo  $t$  l'arco su di essa contato a partire da  $P_1$ : e, conforme ad una osservazione già fatta in una Nota precedente, supporremo senz'altro che, scritte le equazioni di  $\mathcal{C}$  nella forma

$$(4) \quad x = x(t) \quad , \quad y = y(t) ,$$

queste funzioni siano di classe  $C''$ . Indicheremo con  $P(t)$  il punto di  $\mathcal{C}$  di parametro  $t$ ; sarà, indicando con  $\mathfrak{s}$  la lunghezza di  $\mathcal{C}$ ,  $P(0) = P_1$ ,  $P(\tau) = P_2$ . Dalle ipotesi fatte sopra segue che per ogni punto  $P(t)$  di  $\mathcal{C}$  potremo condurre una ed una sola normale a  $\mathcal{C}$ : sia  $s(t)$  il valore del parametro  $s$  corrispondente a tale normale. Fissato sulle normali a  $\mathcal{C}$  il verso positivo nel modo usuale, indichiamo con  $\omega(t)$  il segmento  $\overset{\circ}{P}(s(t))P(t)$  preso col suo segno: potremo scrivere le equazioni (4) nella forma

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= \dot{x}(s(t)) + \omega(t) \ddot{y}(s(t)) \\ y &= \dot{y}(s(t)) - \omega(t) \ddot{x}(s(t)) \end{aligned} \quad (\omega(0) = \omega(\tau) = 0).$$

Avremo allora

$$(6) \quad \begin{aligned} x' &= \dot{x}'s' + \omega'\dot{y}' + \omega\dot{y}'s' = \dot{x}' + \dot{x}'[(1 + k\omega)s' - 1] + \omega\dot{y}', \\ y' &= \dot{y}'s' - \omega\dot{x}' - \omega\dot{x}'s' = \dot{y}' + \dot{y}'[(1 + k\omega)s' - 1] - \omega\dot{x}' . \end{aligned}$$

E poichè  $t$  è l'arco di  $\mathcal{C}$  trarremo

$$(7) \quad 1 = \omega'^2 + s'^2(1 + k\omega)^2,$$

onde in particolare

$$(8) \quad |\omega'| < 1 \quad , \quad |(1 + k\omega)s'| < 1 .$$

Indicando con  $r$  un'indeterminata, supporremo d'ora in poi  $|\omega| \leq r$ . Per quanto precede dovrà intanto essere  $r < \frac{1}{x}$ . Supporremo per semplicità  $r < 1$ ,  $r < \frac{1}{2x}$ : segue intanto allora da (8):

$$(8)^{bis} \quad |s'| < 2 .$$

Ed il teorema da noi enunciato consisterà nel mostrare che si può prendere  $r$  tanto piccolo che le curve (5) per cui  $|\omega| \leq r$  diano ad  $I$  un valore maggiore di quello di  $\mathcal{C}$ .

3. Prima di dimostrare il nostro teorema occorre ancora trovare una conveniente espressione per la funzione  $\mathcal{E}$  di Weierstrass. Serberemo le notazioni del n°. precedente: noteremo inoltre esplicitamente che ove compare una funzione di  $s$  si deve immaginare in essa posto  $s = s(t)$ .

Si osservi che è

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}(xy; \dot{x}\dot{y}; x'y') = \mathcal{F}(xy; x'y) - \mathcal{F}(xy; \dot{x}\dot{y}') - \\
 & \quad - (x' - \dot{x}') \mathcal{F}'_{x'}(xy; \dot{x}\dot{y}') - (y' - \dot{y}') \mathcal{F}'_{y'}(xy; \dot{x}\dot{y}') = \\
 (9) \quad & = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{F}_{x''}''(xy; \dot{x}\dot{y}) (x' - \dot{x})^2 + 2\mathcal{F}_{x'y'}''(xy; \dot{x}\dot{y}) (x' - \dot{x}) + \right. \\
 & \quad \left. + \mathcal{F}_{y''}''(xy; \dot{x}\dot{y}) (y' - \dot{y})^2 \right\} + \\
 & \quad + \frac{1}{3!} \sum_{i+k=3} \binom{i}{3} \mathcal{F}_{x^i y^k}'''(xy; \bar{x}\bar{y}) (x' - \dot{x})^i (y' - \dot{y})^k,
 \end{aligned}$$

dove è  $\bar{x}' = \dot{x}' + \vartheta(x' - \dot{x}')$ ,  $\bar{y}' = \dot{y}' + \vartheta(y' - \dot{y}')$  con  $0 < \vartheta < 1$ : sarà quindi per le nostre ipotesi

$$(10) \quad |\mathcal{F}_{x^i y^k}'''(xy; \bar{x}\bar{y}')| < \frac{2M}{1 + (1 + k\omega)s'} \quad (1). \quad (i + k = 3)$$

Sostituiamo a  $x' - \dot{x}'$ ,  $y' - \dot{y}'$  i valori risultanti da (6), alle  $\mathcal{F}_{x''}''$ ,  $\mathcal{F}_{x'y'}''$ ,  $\mathcal{F}_{y''}''$  le loro espressioni per  $\mathcal{F}_1$ : il gruppo dei termini di 2° grado scritto fra parentesi in (9) si riduce a  $\mathcal{F}_1(xy; \dot{x}\dot{y}) \omega'^2$ : mentre gli altri termini costituiscono un polinomio di 3° grado in  $\omega'$ ,  $1 - (1 + k\omega)s'$ .

Ricordiamo ora che per (6) e (7)  $1 - \dot{x}'x' - \dot{y}'y'$  tende a 0 allora ed allora soltanto che  $\omega'$  tende a zero e  $(1 + k\omega)s'$  tende a 1; ricordiamo ancora che (7) si può scrivere

$$(11) \quad \omega'^2 = [1 - (1 + k\omega)s'][1 + (1 + k\omega)s'];$$

(1) Infatti posto  $\nu^2 = \bar{x}''^2 + \bar{y}''^2$ , sarà per (6) e (7)  $\nu^2 = 1 - 2\vartheta(1 - \vartheta)(1 - (1 + k\omega)s')$  onde poichè  $\vartheta(1 - \vartheta) \leq \frac{1}{4}$ ,

$$\nu^2 \geq 1 - \frac{1}{2}[1 - (1 + k\omega)s'] = \frac{1}{2}[1 + (1 + k\omega)s'].$$

Ora si osservi che, posto  $\xi = \frac{\bar{x}'}{\nu}$ ,  $\eta = \frac{\bar{y}'}{\nu}$ , abbiamo, poichè  $\mathcal{F}$  è positivamente omogenea di primo grado rapporto a  $x'y'$ ,

$$\mathcal{F}_{x^i y^k}'''(xy; \xi\eta) = \nu^2 \mathcal{F}_{x^i y^k}'''(xy; \bar{x}\bar{y});$$

ma  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ , quindi

$$|\mathcal{F}_{x^i y^k}'''(xy; \xi\eta)| < M,$$

onde

$$\mathcal{F}_{x^i y^k}'''(xy; \bar{x}\bar{y}) < \frac{M}{\nu^2} < \frac{2M}{1 + (1 + k\omega)s'}.$$

segue allora da (9) che le ipotesi 1° e 2° del nostro teorema si possono enunciare assieme dicendo che esistono due numeri positivi  $\varrho$  e  $\mu_1$  tali che quando  $xy$  dista da  $\mathfrak{C}$  meno di  $\varrho$ , sia

$$(12) \quad \frac{\mathcal{E}(xy; \dot{x}'\dot{y}'; x'y')}{1 - (1 + k\omega)s'} \geq \mu_1, \quad F_1(xy; \dot{x}'\dot{y}') \geq 2\mu_1.$$

Supporremo d'ora in poi  $r \leq \varrho$ .

Dividiamo i punti di  $\mathfrak{C}$  in due insiemi  $\chi$  e  $\chi_1$  a seconda che in essi è  $s' \geq 0$  oppure  $s' < 0$ : indicheremo con  $\chi$  e  $\chi_1$  anche le misure di  $\chi$  e  $\chi_1$  rispettivamente: sarà  $\chi + \chi_1 = \tau$ .

Dico che si possono trovare delle funzioni  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  tali che in  $\mathfrak{C}$  sia

$$(13) \quad \mathcal{E}(xy; \dot{x}'\dot{y}'; x'y') = \left[ \frac{1}{2} F_1(xy; \dot{x}'\dot{y}') + \lambda_3 \omega' \right] \omega'^2 + \lambda_4 [1 - (1 + k\omega)s']$$

e che si abbia sempre

$$(14) \quad \frac{1}{2} F_1(xy; \dot{x}'\dot{y}') + \lambda_3 \omega' \geq \frac{\mu_1}{2}$$

$$(15) \quad |\lambda_3| \leq L, \text{ dove } L \text{ è il massimo dei due numeri } \frac{32}{3} M, \frac{M^2}{\sqrt{7}\mu_1}$$

$$(16) \quad \lambda_4 \geq 0 \text{ in } \chi, \quad \lambda_4 \geq \frac{\mu_1}{2} \text{ in } \chi_1.$$

Porremo perciò ad esempio:

$$(17)_1 \quad \lambda_3 = \frac{1}{3!} \sum_{i+k=3} \binom{i}{3} F'''_{x''y''k}(xy; \dot{x}'\dot{y}') \left( \frac{x' - \dot{x}'}{\omega'} \right)^i \left( \frac{y' - \dot{y}'}{\omega'} \right)^k, \quad \lambda_4 = 0$$

in  $\chi$  ossia per  $2 \geq 1 + (1 + k\omega)s' \geq 1$ ;

$$(17)_2 \quad \lambda_3 = \frac{1}{2\omega'} [\mu_1 - F_1(xy; \dot{x}'\dot{y}')],$$

$$\lambda_4 = \frac{\mathcal{E}}{1 - (1 + k\omega)s'} - \frac{\mu_1}{2} (1 + (1 + k\omega)s')$$

per  $1 > 1 + (1 + k\omega)s' \geq \frac{\mu_1}{2M}$  (1); ed infine per  $\frac{\mu_1}{2M} \geq 1 + (1 + k\omega)s' \geq 0$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{1 + (1 + k\omega)s'}{1 - (1 + k\omega)s'}} \frac{M}{\mu_1} [M - F_1(xy; \dot{x}'\dot{y}')]$$

$$(17)_3 \quad \lambda_4 = \frac{\mathcal{E}}{1 - (1 + k\omega)s'} - \left\{ \frac{M}{\mu_1} [1 + (1 + k\omega)s'] [M - F_1(xy; \dot{x}'\dot{y}')] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} F_1(xy; \dot{x}'\dot{y}') \right\} (1 + (1 + k\omega)s').$$

(1) Si rammenti che, essendo per ipotesi  $F_1 < M$ , da (12) segue  $M \geq 2\mu_1$  e quindi a maggior ragione pure  $\frac{\mu_1}{2M} < 1$ .

Si verifica subito, ricordando (11) che, con tali posizioni (13) risulta sempre identica. Per verificare la (14) si osservi che nei tre casi si ha rispettivamente

$$(14)_1 \quad \frac{1}{2} F_1 + \lambda_3 \omega' = \frac{\mathcal{E}}{\omega'^2} = \frac{\mathcal{E}}{1 - (1 + k\omega) s'} \cdot \frac{1}{1 + (1 + k\omega) s'} \geq \frac{\mu_1}{2},$$

$$(14)_2 \quad \frac{1}{2} F_1 + \lambda_3 \omega' = \frac{\mu_1}{2},$$

$$(14)_3 \quad \frac{1}{2} F_1 + \lambda_3 \omega' = [1 + (1 + k\omega) s'] \frac{(M - F_1) M}{\mu_1} + \frac{1}{2} F_1 \geq \frac{1}{2} F_1 \geq \frac{\mu_1}{2}.$$

Più complesso è verificare la (15). Intanto in  $\chi$  essendo  $1 + (1 + k\omega) s' \geq 1$  la (10) dà che ivi è  $|F'''_{x''y''}| < 2M$ , mentre per (6), (8) e (11) si ha

$$\left| \frac{x' - \ddot{x}'}{\omega'} \right| = \left| \ddot{y}' - \ddot{x}' \frac{1 - (1 + k\omega) s'}{\omega'^2} \omega' \right| = \left| \ddot{y}' - \ddot{x}' \omega' \frac{1}{1 + (1 + k\omega) s'} \right| \leq 2$$

e similmente  $\left| \frac{y' - \ddot{y}'}{\omega'} \right| \leq 2$  onde da (17)<sub>1</sub> segue che in  $\chi$  è

$$(15)_1 \quad |\lambda_3| < \frac{32}{3} M.$$

Da (17)<sub>2</sub> essendo allora  $1 > 1 + (1 + k\omega) s' \geq \frac{\mu_1}{2M}$  e quindi per (11)

$$|\omega'| = \sqrt{[1 + (1 + k\omega) s'][(2 - 1 + (1 + k\omega) s')]} \geq \frac{\sqrt{(4M - \mu_1) \mu_1}}{2M},$$

segue subito

$$(15)_2 \quad |\lambda_3| < \frac{M^2}{\sqrt{(4M - \mu_1) \mu_1}} < \frac{M^2}{\sqrt{7\mu_1^2}} = \frac{M^2}{\sqrt{7}\mu_1}.$$

Infine da (17)<sub>3</sub> si ha, essendo allora  $1 - (1 + k\omega) s' \geq \frac{4M - \mu_1}{2M}$

$$(15)_3 \quad |\lambda_3| < \sqrt{\frac{\mu_1}{4M - \mu_1} \frac{M^2}{\mu_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{M^2}{\mu_1}.$$

Infine per quanto riguarda la (16), essa vale evidentemente in  $\chi$ . Da (17)<sub>2</sub> e (12) segue pure la (16) per il campo  $1 > 1 + (1 + k\omega) s' \geq \frac{\mu_1}{2M}$ . Ed infine da (17)<sub>3</sub> segue

$$(16)_3 \quad \lambda_4 > \mu_1 - \left[ \frac{M - 2\mu_1}{2} + \frac{M}{2} \right] \frac{\mu_1}{2M} > \frac{\mu_1}{2}$$

come volevasi mostrare.

Si noti infine che, poichè le derivate prime di  $F_1(xy; \dot{x}\dot{y})$  sono minori di  $M$  in valore assoluto, ed è  $|x - \dot{x}| < \omega$ ,  $|y - \dot{y}| < \omega$ , si può ancora scrivere  $\frac{1}{2} F_1(xy; \dot{x}\dot{y}) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{F}_1 + \omega \lambda_5$  con

$$(18) \quad |\lambda_5| < M.$$

Ne segue che al posto di (13) si può ancora scrivere

$$(19) \quad \mathcal{E} = \left( \frac{1}{2} \overset{\circ}{F}_1 + \lambda_5 \omega + \lambda_3 \omega' \right) \omega'^2 + \lambda_4 (1 - (1 + k\omega) s')$$

dove valgono le (15), (16), (18) e

$$(19) \quad \frac{1}{2} \overset{\circ}{F}_1 + \lambda_5 \omega + \lambda_3 \omega' \geq \frac{\mu_1}{2}.$$

Nella prossima Nota utilizzeremo questi risultati per dimostrare in modo assai facile il teorema enunciato al n. 1.

**Astronomia. — Perturbazioni, efemeridi e luoghi normali del pianeta (674) Rachele.** Nota di E. BIANCHI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Nell'ultimo volume delle Memorie del R. Osservatorio al Collegio Romano (serie III, vol. V, parte I) ho reso conto delle tre osservazioni di prima opposizione da me poste a fondamento del calcolo degli elementi orbitali di questo pianeta, ed ho esposto non solo gli elementi stessi conclusi, ma pur anche l'ammontare delle perturbazioni causate da Giove e Saturno fra prima e seconda opposizione (1908-1909, 1910) e l'efemeride per la ricerca del pianeta in seconda opposizione. Nel numero 4501 delle Astronomische Nachrichten ho poi riportato i risultati ottenuti dalla correzione dell'orbita in base alle osservazioni di due sole opposizioni coll'ammettere sulle le correzioni ai due elementi  $\Omega$  ed  $i$  del piano, e l'efemeride di ricerca in 3<sup>a</sup> opposizione (giugno 1911) dedotta dagli elementi così corretti.

Tale correzione incompleta ebbe solo lo scopo di apportare agli elementi dell'orbita originale maggiori approssimate tali da rendere possibile di rintracciare in cielo il pianeta intorno alla sua 3<sup>a</sup> opposizione senza penose ricerche. Nella presente Nota intendo di riassumere oltre i calcoli delle perturbazioni fra 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> opposizione, anche quelli relativi all'efemeride di 3<sup>a</sup> opposizione che deriva dagli elementi originali non corretti, nonchè il paragone rigoroso di alcune osservazioni di 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> opposizione colle relative efemeridi per arrivare alla conclusione di tre luoghi normali che do-

vranno servire alla correzione completa degli elementi orbitali del pianeta in parola, correzione della quale sarà dato ragguaglio in una prossima comunicazione.

Gli elementi da me dedotti dalle osservazioni di prima opposizione furono i seguenti:

Sistema (A) = Opposizione 1<sup>a</sup> (scoperta)

1909 gennaio 4, 12<sup>h</sup> Berlino

$$M = 324^\circ 37' 38'' 8$$

$$\omega = 38^\circ 54' 48.4'$$

$$\Omega = 58^\circ 54' 49.4' \quad \left. \right\} 1919.0$$

$$i = 13^\circ 35' 36.1' \quad \left. \right\}$$

$$\varphi = 10^\circ 56' 13.8'$$

$$\mu = 708.6050$$

$$\log a = 0.466402$$

A questi elementi corrispondono le

*Coordinate eliocentriche equatoriali*

$$x = [9.991020] . r. \sin(v + 187^\circ 6' 9'' 5)$$

$$y = [9.938065] . r. \sin(v + 103^\circ 52' 56.0)$$

$$z = [9.730195] . r. \sin(v + 78^\circ 17' 4.2)$$

dove la seguente efemeride di 1<sup>a</sup> opposizione per il confronto delle osservazioni che saranno fatte concorrere alla formazione del 1° luogo normale:

12<sup>h</sup> Berlino.

Data 1909	$\alpha_{\text{vera}}$	$\delta_{\text{vera}}$	$\log A$	$\log r$
Gennaio				
2	1 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup> .61	+ 6° 17' 47'' 8	0.326259	0.401759
3	36 12.71	26 29.9		
4	36 43.18	35 16.6	0.330918	0.401244
5	37 15.01	44 7.7		
6	37 48.19	6 53 3.1	0.335546	0.400726
7	38 22.72	7 2 2.8		
8	1 38 58.59	+ 7 11 6.6	0.340153	0.400211

Se, tenuto conto delle perturbazioni causate da Giove e Saturno, trasportiamo l'osculazione in 2<sup>a</sup> opposizione, otteniamo :

Sistema (B) = Opposizione 2<sup>a</sup>

1910 marzo 3, 12<sup>h</sup> Berlino

$$M = 47^{\circ} 47' 16.8''$$

$$\omega = 39^{\circ} 1' 38.7''$$

$$\Omega = 58^{\circ} 54' 7.2'' \quad \left. \right\} 1910.0$$

$$i = 13^{\circ} 35' 36.6''$$

$$g = 10^{\circ} 57' 10.3''$$

$$\mu = 708.1886$$

$$\log a = 0.466572$$

L'efemeride che discende da questi elementi, e che servirà per il confronto delle osservazioni di 2<sup>a</sup> opposizione, scelte per la formazione del 2<sup>o</sup> luogo normale, è quella riportata nella Nota sopra citata.

*Perturbazioni da 2<sup>a</sup> a 3<sup>a</sup> opposizione ed elementi non corretti di 3<sup>a</sup> opposizione.* — Cogli elementi poc'anzi scritti furono calcolate le perturbazioni per opera di Giove e Saturno da 1910 marzo 3 a 1911 giugno 26, ottenendo :

per Giove	per Saturno	e quindi in somma
$\int \Delta i = + 1' 2.87$	$= + 0.26$	$= + 1' 3.1$
$\int \Delta \Omega = - 2^{\circ} 32.71$	$= - 0.67$	$= - 2^{\circ} 33.4$
$\int \Delta \mu = + 0.35775$	$= - 0.00372$	$= + 0.35403$
$\int \Delta L = - 10^{\circ} 11.72$	$= - 9.73$	$= - 10^{\circ} 21.5$
$\int \Delta \pi = - 2^{\circ} 53.82$	$= + 10.87$	$= - 2^{\circ} 43.5$
$\int \Delta g = + 6^{\circ} 13.40$	$= + 4.44$	$= + 6^{\circ} 17.8$

dove il seguente sistema osculante intorno alla 3<sup>a</sup> opposizione :

Sistema (C) = Opposizione 3<sup>a</sup>

1911 giugno 26, 12<sup>h</sup> Berlino

$$M = 142^{\circ} 5' 9.5''$$

$$\omega = 39^{\circ} 1' 28.6''$$

$$\Omega = 58^{\circ} 51' 33.8'' \quad \left. \right\} 1910.0$$

$$i = 13^{\circ} 36' 39.7''$$

$$g = 11^{\circ} 3' 28.1''$$

$$\mu = 708.54265$$

$$\log a = 0.466427$$

A questi elementi corrispondono le

*Coordinate eliocentriche equatoriali*

$$x = [9.991007] . r \cdot \sin(v + 187^\circ 9' 24.8'')$$

$$y = [9.937983] . r \cdot \sin(v + 103^\circ 56' 48.2'')$$

$$z = [9.720454] . r \cdot \sin(v + 78^\circ 20' 27.2'')$$

dove la seguente

*Efemeride di 3<sup>a</sup> opposizione.*

12<sup>h</sup> Berlino.

Data 1911	$\alpha$ vera	$\delta$ vera	log $A$	log $r$
Genesio				
8	16 8.35.31	— 24 17 58.6	0.378112	0.529708
10	16 50.04	18 35.6	379644	529912
12	5 7.33	19 6.9	381373	530195
14	3 27.51	19 33.6	383292	530435
16	1 50.88	19 56.8	385395	530673
18	16 0 17.72	20 17.5	387675	530908
20	15 58 48.29	20 36.6	390127	531141
22	57 22.86	20 54.8	392746	531371
24	56 1.67	21 13.3	395520	531600
26	54 44.92	21 33.6	398442	531826
28	53 32.84	21 56.7	401505	532050
30	52 25.62	22 23.4	404701	532271
Luglio				
2	51 23.37	22 54.0	408023	532490
4	50 26.15	23 28.8	411457	532706
6	15 49 33.97	— 24 24 8.2	0.414994	0.532920

*Osservazioni utilizzate.* — Per la deduzione dei 3 luoghi normali che, come dicemmo, saranno posti a fondamento della correzione completa dell'orbita, non furono utilizzate tutte le osservazioni di 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> opposizione; ma di esse quelle soltanto che corrispondono ad epochhe assai prossime alle rispettive osculazioni, e ciò per non introdurre nei luoghi normali vizii causati dalle perturbazioni su luoghi che dalle osculazioni stesse troppo si scostino.

Tali osservazioni utilizzate, rivedute e controllate in tutte le loro parti, sono scritte qui di seguito; le due ultime colonne contengono gli scarti (osservazione meno calcolo) che, rispetto ad esse, presentano i luoghi delle efemeridi sopra riportate.

DATA	OSSERVATORIO	OSSERVATORIO	TEMPO MEDIO LOCALE	α app.	Log p. A	δ app.	Log p. A	SCARTI	
								Δ α	Δ δ
<i>1<sup>a</sup> opposizione.</i>									
1909 gennaio 2	Simonin	Nizza	5 50 34	1 35 36.47	9.004	+ 6 15 35.6	0.730	- 0.08	+
2	Bianchi	Roma C. R.	9 55 16	35 40.74	9.507	16 53.5	0.726	+ 0.01	- 1.8
4	Simonin	Nizza	5 50 32	36 35.37	8.981	32 57.8	0.727	- 0.04	- 3.1
4	Millosevich	Roma C. R.	6 14 58	36 35.47	8.713	33 2.8	0.705	+ 0.04	0.4
4	Bianchi	Id.	6 14 58	36 35.46	8.713	33 1.6	0.705	+ 0.03	- 0.8
7	Simonin	Nizza	5 42 38	1 38 13.70	8.955	+ 6 59 39.4	0.723	- 0.03	- 1.5
<i>2<sup>a</sup> opposizione.</i>									
1910 marzo 4	Pidoux	Ginevra	8 6 57	11 44 31.87	(- 0.25) <sup>s</sup>	+ 24 23 17.5	(+3.0)	+ 9.65	- 1 7.5
4	Abetti	Arcetri	8 23 56	44 31.83	9.637	23 18.2	0.659	9.51	6.8
5	Id.	Id.	8 17 29	43 37.64	9.638	27 32.2	0.659	9.65	8.3
6	Id.	Id.	7 49 25	42 43.55	9.635	31 33.0	0.683	9.50	7.2
7	Pidoux	Ginevra	8 28 31	41 45.92	(- 0.24) <sup>s</sup>	35 33.9	(+2.8)	9.61	7.7
7	Arce'ri	Arce'ri	7 52 11	41 48.01	9.649	35 23.5	0.674	9.47	9.3
8	Pidoux	Ginevra	8 45 22	40 49.68	(- 0.23) <sup>s</sup>	39 14.7	(+2.6)	9.74	8.1
8	Abetti	Arcetri	8 6 39	40 51.89	9.636	39 7.2	0.655	9.66	6.9
9	Id.	Id.	7 56 26	11 39 56.28	9.641	+ 24 42 31.5	0.659	- 1 6.7	
<i>3<sup>a</sup> opposizione.</i>									
1911 giugno 23	Abetti	Roma C. R.	9 45 57	15 57 8.50	8.166	- 24 23 37.6	0.905	+ 22.50	- 2 ' 31.3
27	Bianchi	Id.	9 35 19	15 54 34.73	-∞	- 24 24 16.3	0.905	+ 22.41	- 2 29.6

*Luoghi normali.* — Ridotti gli scarti  $\Delta\alpha$  al cerchio massimo per controllare una loro eventuale variazione col tempo, ed assicurato così che tale variazione non si verifica, come del resto era logico avvenisse data la piccolezza degli scarti stessi, vale a dire data la già notevole bontà degli elementi orbitali, se ne concludono le seguenti correzioni medie alle rispettive effemeridi:

$$1909 \text{ gennaio } 4,5 \text{ Berlino} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha = -0.012 = -0.18 \\ \Delta\delta = \quad \quad \quad = -0.97 \end{array} \right.$$

$$1910 \text{ marzo } 3,5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha = +9.598 = +143.97 \\ \Delta\delta = \quad \quad \quad = -67.61 \end{array} \right.$$

$$1911 \text{ giugno } 26,5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha = +22.455 = +336.82 \\ \Delta\delta = \quad \quad \quad = -150.45 \end{array} \right.$$

Tali scarti medi applicati ai corrispondenti luoghi delle efemeridi danno origine ai tre luoghi normali che qui seguono già ridotti all'equinozio medio del 1910.0.

$$1909 \text{ gennaio } 4, \quad 12^{\text{h}} \text{ Berlino} \quad \alpha = 24^{\circ} 11' 49.6'' \quad \delta = +6^{\circ} 35' 39.5''$$

$$1910 \text{ marzo } 3, \quad " \quad " \quad = 176^{\circ} 19' 24.6'' \quad = +24^{\circ} 19' 31.1''$$

$$1911 \text{ giugno } 26, \quad " \quad " \quad = 238^{\circ} 45' 42.9'' \quad = -24^{\circ} 23' 44.8''$$

luoghi normali che chiameremo *perturbati* come quelli che derivano da elementi nei quali fu tenuto il debito conto delle perturbazioni, che corrispondono cioè a posizioni *vere* dell'astro.

Benchè essi provengano (specie il 3°) da un numero diverso di osservazioni, pure li considereremo tutti d'egual peso, sia perchè il 3° luogo corrisponde ad osservazioni fatte da osservatori diversi e in buon accordo fra loro, sia perchè tali osservazioni hanno due eccellenti stelle di riferimento (quasi fondamentali), sia infine perchè, nel caso attuale di correzione dell'orbita, non è tanto la estrema squisitezza dei luoghi normali che può assicurare buoni risultati, quanto invece la grandezza ben notevole dell'arco eliocentrico abbracciato dai luoghi estremi.

Geodesia. — *Sulle rappresentazioni isodromiche.* Nota II di CORRADINO MINEO, presentata dal Corrisp. A. VENTURI.

Di queste rappresentazioni (escogitate dal prof. Venturi) ci siamo occupati in una precedente Nota <sup>(1)</sup>. Date due superficie  $S$  e  $S'$  e fissata sulla prima una famiglia di curve  $\Gamma$ , una rappresentazione *isodromica* di  $S$  su  $S'$  è ogni corrispondenza puntuale tra le due superficie, che a ogni traiettoria isogonale delle linee  $\Gamma$  di  $S$  fa corrispondere sulla  $S'$  una traiettoria isogonale delle curve  $\Gamma'$ , corrispondenti di  $\Gamma$ . Potremo chiamare *lossodromiche* le  $\infty^2$  linee, ognuna delle quali incontra sotto angolo costante una famiglia di curve  $\Gamma$  di una superficie  $S$ , e quindi potremo dire che la rappresentazione isodromica conserva le lossodromiche (senza essere conforme): essa è perciò *relativa* a una famiglia di curve fondamentali  $\Gamma$  scelta ad arbitrio sulla superficie obiettiva  $S$ . Ora nella Nota citata noi abbiamo scelto come curve  $\Gamma$  una famiglia di linee *isoterme* sulla  $S$ , mentre qui, seguendo i consigli del chino prof. Pizzetti, — al quale porgiamo i nostri più vivi ringraziamenti, — intendiamo liberarci da questa restrizione, assumendo sulla  $S$  una famiglia *qualunque* di linee  $\Gamma$ ; e mostreremo che *il problema di assegnare le formole di ogni rappresentazione isodromica della  $S$  su di un'altra superficie  $S'$ , si può ricondurre alle quadrature tutte le volte che alle quadrature si riduce la determinazione delle lossodromiche di  $S$  rispetto alla famiglia di linee  $\Gamma$  prescelta.*

1. Senza ledere la generalità, potremo assumere come linee  $v = \text{costante}$  sulla  $S$  la famiglia di linee fondamentali  $\Gamma$  assegnate, e come linee  $u = \text{costante}$  le traiettorie ortogonali delle  $\Gamma$ . L'elemento lineare di  $S$  prende allora la forma

$$(1) \quad ds^2 = e du^2 + g dv^2,$$

dove  $e$  e  $g$  saranno note funzioni di  $u$  e  $v$ . La superficie  $S'$  sarà sempre riferita a un sistema isotermo  $(u', v')$  e saranno mantenute le notazioni adottate nella nostra Nota (pp. 663-664).

Poniamo inoltre

$$(2) \quad \sqrt{\frac{e}{g}} = \varphi(u, v) = \varphi,$$

<sup>(1)</sup> Vedi questi Rendiconti, vol. XX, serie 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 9<sup>o</sup>, pp. 663-667.

dimodochè l'equazione differenziale delle lossoodromiche di S è

$$(3) \quad \frac{dv}{du} = a\varphi,$$

essendo  $a$  una costante <sup>(1)</sup>.

Le funzioni incognite  $u'$  e  $v'$  devono in questo caso soddisfare al sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u}}{\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v}} = \pm h, \\ \frac{\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2}{\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2} = k^2\varphi^2; \end{cases}$$

che si riduce all'antico per  $\varphi = 1$  [cfr. la Nota citata, formole (11)].

Una trasformazione algebrica permette di trasformare il sistema (4) nel seguente sistema lineare

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial u} = \mp \frac{1}{h} \frac{\partial v'}{\partial u} + k \frac{\sqrt{1+h^2}}{h} \varphi \frac{\partial v'}{\partial v}, \\ \frac{\partial v'}{\partial u} = \pm \frac{1}{h} \frac{\partial u'}{\partial u} - k \frac{\sqrt{1+h^2}}{h} \varphi \frac{\partial u'}{\partial v}. \end{cases}$$

Dalle (5) si ottiene l'equazione

$$(6) \quad \varphi \frac{\partial^2 u'}{\partial u^2} - 2km\varphi^3 \frac{\partial^2 u'}{\partial u \partial v} + k^2\varphi^3 \frac{\partial^2 u'}{\partial v^2} = U \frac{\partial u'}{\partial u} + k^2\varphi^2 V \frac{\partial u'}{\partial v},$$

avendo posto

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = V; \quad \pm \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} = m.$$

La (6) è integrabile col metodo di Monge. Formiamo le note equazioni ausiliarie

$$(8) \quad \begin{cases} dv^2 + 2km\varphi du dv + k^2\varphi^2 du^2 = 0, \\ \varphi dp dv + k^2\varphi^3 dq du - (Up - k^2\varphi^2 Vq) du dv = 0, \end{cases}$$

(1) È degno di nota che l'equazione differenziale delle lossoodromiche di una superficie S, rispetto alle linee  $v$  (o  $u$ ) d'un suo sistema curvilineo *qualunque* ( $u, v$ ), contiene come caso particolare quella da cui dipende la ricerca dei sistemi isotermi di S. Nel caso nostro, supponendo che nella (3)  $a$  sia in generale un numero complesso, basta in particolare porre  $a$  eguale all'unità immaginaria  $i$ .

essendo

$$(9) \quad p = \frac{\partial u'}{\partial u} \quad , \quad q = \frac{\partial u'}{\partial v}.$$

Dalla 1<sup>a</sup> delle (8) ricaviamo

$$\frac{dv}{du} = -k\varphi(m \pm i\sqrt{1-m^2}),$$

dove è  $1-m^2 > 0$ .

Poniamo per brevità

$$(10) \quad g_1 = -k(m + i\sqrt{1-m^2}) \quad , \quad g_2 = -k(m - i\sqrt{1-m^2}),$$

e cominciamo dal considerare l'equazione

$$(11) \quad \frac{dv}{du} = g_1 \varphi.$$

Se, come abbiamo supposto, si conosce l'equazione delle lossoodromiche di S in termini finiti, cioè l'integrale generale di (3), avremo anco l'integrale generale di (11) cambiando in quello di (3) a in  $g_1$ . Sia dunque

$$(12) \quad v = f(u, g_1, c) = f_1$$

l'integrale generale di (11), essendo  $c$  una costante arbitraria.

Poniamo

$$(13) \quad \varphi_1 = \varphi(u, v)_{v=f_1}, \quad U_1 = (U)_{v=f_1}, \quad V_1 = (V)_{v=f_1}.$$

La 2<sup>a</sup> delle (8), tenuto conto delle (11), (12), (13), si trasforma in quest'altra:

$$(14) \quad g_1 dp + k^2 \varphi_1 dq - g_1 \left( \frac{U_1}{\varphi_1} p - k^2 \varphi_1 V_1 q \right) du = 0,$$

la quale, com'è facile verificare, è completamente integrabile. Il suo integrale è

$$(15) \quad g_1 p + k^2 \varphi_1 q - C g_1 e^{-\int \frac{U_1}{\varphi_1} du} = 0,$$

essendo C una costante arbitraria.

Poniamo

$$(16) \quad e^{-\int \frac{U_1}{\varphi_1} du} = \Phi(u, g_1, c).$$

Supponiamo di poter risolvere la (12) rispetto alla costante  $c$  e di avere

$$(17) \quad c = \theta(u, v, g_1) = \theta_1.$$

Introducendo questo valore di  $c$  nella (15) e risolvendo quest'ultima rispetto all'altra costante  $C$ , si ottiene

$$(18) \quad C = \left( p + \frac{k^2 \varphi}{g_1} q \right) \Phi_1,$$

essendo

$$(19) \quad \Phi_1 = \Phi(u, g_1, \theta_1).$$

Allora un integrale intermedio di (6) è

$$(20) \quad \left( p + \frac{k^2 \varphi}{g_1} q \right) \Phi_1 = F_1(\theta_1),$$

dove  $F_1$  è simbolo di funzione arbitraria.

Se indichiamo con  $\theta_2$  e  $\Phi_2$  ciò che diventano le funzioni  $\theta_1$  e  $\Phi_1$  quando in quest'ultime si sostituisca  $g_2$  invece di  $g_1$ , un altro integrale intermedio di (6) è evidentemente

$$(21) \quad \left( p + \frac{k^2 \varphi}{g_2} q \right) \Phi_2 = F_2(\theta_2),$$

essendo  $F_2$  simbolo di altra funzione arbitraria.

Notiamo le identità, facili a verificare:

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + g_1 \varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = 0, & \frac{\partial \theta_2}{\partial u} + g_2 \varphi \frac{\partial \theta_2}{\partial v} = 0, \\ \frac{\varphi}{\Phi_1} \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + g_1 \varphi \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right] = \frac{\varphi}{\Phi_2} \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + g_2 \varphi \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right] = -U. \end{cases}$$

Se consideriamo ora (20) e (21) come equazioni simultanee per determinare  $p$  e  $q$ , i valori di  $p$  e  $q$  dedotti, come è noto, rendono integrabile la  $du' = p du + q dv$ . Otteniamo, badando alle (9),

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{1}{g_1 - g_2} \left[ g_1 \frac{F_1(\theta_1)}{\Phi_1} - g_2 \frac{F_2(\theta_2)}{\Phi_2} \right], \\ \frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{1}{(g_1 - g_2) \varphi} \left[ \frac{F_2(\theta_2)}{\Phi_2} - \frac{F_1(\theta_1)}{\Phi_1} \right]. \end{cases}$$

E quindi dalle (5) segue, introducendo le (23) e tenendo conto di (7) e (10),

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{i}{g_1 - g_2} \left[ g_1 \frac{F_1(\theta_1)}{\Phi_1} + g_2 \frac{F_2(\theta_2)}{\Phi_2} \right], \\ \frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{-i}{(g_1 - g_2) \varphi} \left[ \frac{F_1(\theta_1)}{\Phi_1} + \frac{F_2(\theta_2)}{\Phi_2} \right]; \end{cases}$$

e anco i secondi membri delle (24) soddisfanno alle condizioni necessarie e sufficienti per rappresentare le derivate parziali di una stessa funzione  $v'$ : cosa che del resto si verifica subito con l'aiuto delle identità (22). Potremo dunque scrivere

$$(25) \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{g_1 - g_2} \int_{u_1}^u \left[ g_1 \frac{F_1(\theta_1)}{\Phi_1} - g_2 \frac{F_2(\theta_2)}{\Phi_2} \right] du + \\ \quad + \frac{1}{g_1 - g_2} \int_{v_1}^v \left[ \frac{F_2(\theta_2)}{\varphi \Phi_2} - \frac{F_1(\theta_1)}{\varphi \Phi_1} \right] dv + \text{cost}, \\ v' = \frac{i}{g_1 - g_2} \int_{u_2}^u \left[ g_1 \frac{F_1(\theta_1)}{\Phi_1} + g_2 \frac{F_2(\theta_2)}{\Phi_2} \right] du - \\ \quad - \frac{i}{g_1 - g_2} \int_{v_2}^v \left[ \frac{F_1(\theta_1)}{\varphi \Phi_1} + \frac{F_2(\theta_2)}{\varphi \Phi_2} \right] dv + \text{cost}, \end{cases}$$

essendo  $u_1, v_1, u_2, v_2$  valori affatto arbitrari.

Note dunque  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , che derivano direttamente dall'integrale di (3) risoluto rispetto alla costante di integrazione, le formole di rappresentazione isodromica di S su S' son date per quadrature dalle (25): come si voleva dimostrare.

2. Consideriamo qualche caso particolare.

a) La  $\varphi$  è una costante eguale a 1. — Il sistema  $(u, v)$  costituisce allora un sistema isotermo sulla S. Ponendo  $h = \operatorname{tg} \omega$  e tenendo presenti le (7) e (10), si può scrivere in questo caso

$$\theta_1 = ku + e^{\pm i\omega} v, \quad \theta_2 = ku + e^{\mp i\omega} v, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 1;$$

e dalle (25) si deduce facilmente, essendo  $\Phi$  simbolo di funzione arbitraria,

$$(26) \quad u' + iv' = \Phi(ku + e^{\pm i\omega} v);$$

come abbiamo già trovato nella Nota più volte citata [pag. 665, formula (17)].

Va ancora notato che anco le linee  $v = \text{costante}$  della S' costituiscono una famiglia di linee isotermi: ciò si deduce facilmente dalla (26), ricordando che il sistema  $(u', v')$  di S' è per ipotesi isotermo (n. 1). Infatti con la trasformazione

$$\alpha = ku + \cos \omega \cdot v, \quad \beta = \sin \omega \cdot v,$$

la (26) diviene

$$u' + iv' = \Phi(\alpha \pm i\beta).$$

Ora il sistema  $(\alpha, \beta)$  è certamente isotermo sulla  $S'$ , e poichè le linee  $\beta$  coincidono con le linee  $v$ , anco queste ultime sono isotermi sulla  $S'$ .

Pertanto possiamo concludere che se la famiglia di linee fondamentali  $\Gamma$  scelta sulla  $S$  è isoterna, le linee corrispondenti alle  $\Gamma$  in una rappresentazione isodromica di  $S$  su  $S'$  costituiscono pure una famiglia isoterna.

b) La  $\varphi$  è il quoto d'una funzione della sola  $u$  per una funzione della sola  $v$ . — Sia

$$\varphi = \frac{A(u)}{B(v)}.$$

Alle funzioni  $\theta_1$  e  $\theta_2$  si può dare la seguente forma :

$$\theta_1 = k \int A(u) du + e^{\mp i\omega} \int B(v) dv, \quad \theta_2 = k \int A(u) du + e^{\pm i\omega} \int B(v) dv.$$

Segue inoltre

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{1}{A(u)};$$

e dalle (25) si ricava

$$u' + iv' = \psi \left( k \int A(u) du + e^{\pm i\omega} \int B(v) dv \right),$$

dove  $\psi$  è simbolo di funzione arbitraria.

Notiamo subito che questo caso si riconduce al precedente, giacchè nell'ipotesi fatta il sistema  $(u, v)$  della  $S$  è in fondo isotermo, e i parametri isometrici sono appunto  $\int A(u) du$  e  $\int B(v) dv$ .

c) L'elemento lineare di  $S$  è riducibile alla forma

$$ds^2 = W [du^2 + (u + W_1)^2 dv^2].$$

in cui  $W$  e  $W_1$  sono funzioni qualunque della sola  $v$ .

Le superficie in discorso costituiscono una classe ben nota, e per  $W_1$  eguale a una costante si riducono a superficie applicabili sulle superficie spiralì (1). Il problema della loro rappresentazione isodromica sopra una qualunque superficie  $S'$ , riferita a un sistema isotermo  $(u', v')$ , è riducibile

(1) Vedi Darboux, *Lecons sur la théorie générale des surfaces*, III, pp. 82-83.

alle quadrature, quando su esse come linee fondamentali  $\Gamma$  si prendono le  $v = \text{cost}$ , rispetto alle quali l'equazione delle lossoodromiche è

$$u = e^{\frac{v}{a}} \left[ \frac{1}{a} \int W_1 e^{-\frac{v}{a}} dv + c \right].$$

Abbiamo in questo caso

$$\theta_1 = ue^{-\frac{v}{g_1}} - \frac{1}{g_1} \int W_1 e^{-\frac{v}{g_1}} dv, \quad \theta_2 = ue^{-\frac{v}{g_2}} - \frac{1}{g_2} \int W_1 e^{-\frac{v}{g_2}} dv;$$
$$\Phi_1 = e^{g_1}, \quad \Phi_2 = e^{g_2}.$$

**Matematica — Sopra gli autovalori delle equazioni integrali a nucleo non simmetrico.** Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Il sig. Beudixon ha dato in Acta Mathematica, t. 25, pag. 360, un notevole teorema sopra le equazioni secolari, il quale parmi possa estendersi facilmente alle equazioni integrali. Di questo teorema dò una dimostrazione leggermente diversa da quella originaria di questo autore, dimostrazione la quale permette la suddetta estensione.

A questo scopo mi servirò della teoria delle sostituzioni nella sua forma più elementare come già ho avuto occasione (<sup>1</sup>) di usare in un altro mio lavoro.

Indichiamo con  $\Delta$  una sostituzione dei complessi di ordine  $n$ , e con  $|\Delta|$  il determinante della sua matrice. Se  $\lambda$  indica una quantità secolare, l'equazione in  $\lambda$ :

$$(1) \quad |\Delta - \lambda| = 0$$

indicherà l'equazione secolare relativa al determinante  $|\Delta|$ . Ad ogni radice  $\lambda$  di (1), l'equazione

$$(2) \quad \lambda \bar{x} = \Delta \bar{x}$$

è soddisfatta da complessi  $\bar{x}$  non identicamente nulli. Sia  $\lambda_1 + i\lambda_2$  una radice imaginaria dell'equazione (1). Sia  $\bar{x}_1 + i\bar{x}_2$  un complesso da cui la equazione (2) è soddisfatta quando per  $\lambda$  si pone  $\lambda_1 + i\lambda_2$ .

(<sup>1</sup>) E. Laura, *Sopra una classe generale di vibrazioni dei mezzi isotropi*. Atti della R. Accad. di Torino, vol. XLVI.

Supposto allora  $\Delta$  a coefficienti reali, consegue dalla (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_1 \bar{x}_1 - \lambda_2 \bar{x}_2 = \Delta \bar{x}_1 \\ \lambda_2 \bar{x}_1 + \lambda_1 \bar{x}_2 = \Delta \bar{x}_2. \end{cases}$$

Dalle quali equazioni si trae (il segno  $\times$  indicando prodotto scalare):

$$(4) \quad \lambda_1 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) = \bar{x}_1 \times \Delta \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \times \Delta \bar{x}_2.$$

Mediante una trasformazione ortogonale sopra i complessi  $\bar{x}$  determinabile in modo unico, riduciamo le forme quadratiche:

$$\bar{x}_1 \times \Delta \bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \times \Delta \bar{x}_2$$

alle loro forme Canoniche. I coefficienti  $\alpha_i$  di queste forme sono allora come è ben noto le radici dell'equazione secolare:

$$(5) \quad \left| \frac{\Delta + \Delta'}{2} - \alpha \right| = 0,$$

nella quale  $\Delta'$  è la sostituzione coniugata <sup>(1)</sup> di  $\Delta$ .

L'equazione (4) diviene con ciò:

$$(6) \quad \lambda_1 \sum_{i=1}^n [y_1^{(i)a} + y_2^{(i)a}] = \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_1^{(i)a} + y_2^{(i)a})$$

nella quale le  $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$  indicano gli elementi dei complessi trasformati dei complessi  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ .

Dalla (6) consegue poi facilmente che  $\lambda_1$  è, qualunque siano le  $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$ , compreso tra la massima e la minima delle quantità  $\alpha_i$ , ossia tra la maggiore e la minore delle radici (tutte reali) dell'equazione (5). È questo il teorema del sig. Beudixon.

L'estensione di questo teorema alle equazioni integrali si fa ora facilmente tenendo presente un risultato del sig. Schmidt relativo allo sviluppo in serie di un nucleo simmetrico.

Consideriamo l'equazione integrale:

$$\lambda f(x) = \int_0^1 \varphi(x, y) f(y) dy$$

<sup>(1)</sup> Il termine *sostituzione contraria* usato nella Nota citata, pag. 18, è qui stato cambiato in *sostituzione coniugata* per seguire la terminologia più comunemente usata. Cfr. G. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica mat.*, Torino, 1909.

il nucleo  $\varphi(x, y)$  essendo qualunque (però reale). Sia  $\lambda$  complesso e si ponga

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2.$$

L'autofunzione corrispondente sia:

$$f_1(x) + if_2(x).$$

Dalla (7), separando la parte reale e l'imaginaria, consegue:

$$(8) \quad \begin{cases} \lambda_1 f_1(x) - \lambda_2 f_2(x) = \int_0^1 \varphi(x, y) f_1(y) dy \\ \lambda_1 f_2(x) + \lambda_2 f_1(x) = \int_0^1 \varphi(x, y) f_2(y) dy. \end{cases}$$

Dalla quale:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \int_0^1 [f_1^2(x) + f_2^2(x)] dx = \\ & = \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 \varphi(x, y) f_1(y) dy + \int_0^1 f_2(x) dx \int_0^1 \varphi(x, y) f_2(y) dy. \end{aligned}$$

Ed anche:

$$(9) \quad \begin{aligned} & \lambda_1 \int_0^1 [f_1^2(x) + f_2^2(x)] dx = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2} [f_1(x) f_1(y) + f_2(x) f_2(y)] dx dy. \end{aligned}$$

Il nucleo

$$\frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2}$$

è simmetrico e i suoi autovalori sono reali. Sieno questi ultimi:

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni normalizzate sieno:

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$$

Si ha allora <sup>(1)</sup>:

$$\frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2} = \sum_i^\infty \alpha_i \psi_i(x) \psi_i(y)$$

<sup>(1)</sup> Cfr. E. Schmidt, Mathematische Annalen, Bd. LXIV.

e la serie del 2° membro sia uniformemente convergente. Dalla (9) si deduce:

$$(10) \quad \lambda_1 \int_0^1 [f_1^2(x) + f_2^2(x)] dx = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left\{ \left[ \int_1^1 \psi_i(x) f_1(x) dx \right]^2 + \left[ \int_0^1 \psi_i(x) f_2(x) dx \right]^2 \right\}.$$

Per la diseguaglianza di Bessel si ha ora:

$$\int f_1^2(x) dx > \sum_i \left[ \int f_1(x) \psi_i(x) dx \right]^2.$$

Consegue perciò che  $\lambda_1$  è maggiore della minore delle quantità  $\alpha_i$ .

Si ha perciò il teorema: *La parte reale del reciproco, di ogni autovalore dell'equazione integrale*

$$f(x) = \lambda \int_2^1 g(x, y) f(y) dy$$

*è maggiore della minore delle quantità*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots$$

essendo  $\frac{1}{\alpha_i}$  gli autovalori dell'equazione integrale a nucleo simmetrico:

$$f(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2} f(y) dy.$$

Dall'egualanza (10) segue ancora: *Condizione sufficiente affinché la parte reale di ogni autovalore dell'equazione integrale*

$$f(x) = \lambda \int_0^1 \varphi(x, y) f(y) dy$$

*sia positiva, è che l'equazione integrale:*

$$f(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2} f(y) dy$$

*abbia tutti i suoi autovalori positivi.*

Questo teorema può avere applicazioni in Fisica-Matematica, che spero indicare fra breve.

Geologia. — *Il Pliocene dell'isola di Citera.* Nota di B. NELLI,  
presentata dal Socio C. DE STEFANI.

I fossili che formano oggetto di questo mio breve studio trovansi nel Museo geologico di Firenze e furono raccolti dal prof. Carlo Forsyth Major in diverse località.

Tralasciando di parlare di altri che si sono occupati dell'isola di Citera o Cerigo, una delle isole Jonie, rammenterò solo il Jameson (<sup>1</sup>) che primo accennò ai terreni pliocenici e il dott. Richard Leonhard che nel 1899 (<sup>2</sup>) in una sua monografia geografica tratta anche della costituzione geologica dell'isola.

Quest'autore ci fa sapere che il neogene dell'isola è sommamente fossilifero, ricco d'individui più che di specie. Vi si trovano banchi di ostriche e specialmente verso la parte orientale di Kastrissanika, dove compariscono *Pecten septemradiatus* Müll., *P. Pandorae* Desh., *P. flabelliformis* Desh., inoltre lo *Spondylus quinquecostatus* Desh.

In base a queste considerazioni l'autore ritiene perfettamente coincidente la formazione neogenica di Citera con quelle meridionali del Peloponneso e cioè verosimilmente riferibile al pliocene inferiore, specialmente, egli dice, agli strati levantini.

I diversi campioni di rocce che possediamo sono rappresentati da sabbie, oppure da brecciole a piccoli elementi calcarei bianchi, rossi o scuri, fra i quali compariscono numerosi frammenti di diaspri e di selce rossa o grigia. Questi frammenti provengono certamente da calcari con selce di varia età, specialmente giurassici, così estesi nei monti della stessa Citera, nonchè della Grecia e delle vicine isole.

Il prof. Chelussi che ha esaminato le sabbie, fa sapere che queste contengono circa il 45 % di carbonato calcico e lasciano un residuo finissimo, microscopico.

La separazione col liquido a peso specifico superiore a 2,9 dà una piccolissima parte pesante. In essa i minerali che si ha potuto determinare sono: *glaucofane* a colori pallidissimi e perciò riferibile alla pallida *gastaldite*, *rutilo* non troppo frequente in cristalletti, *zircone* piuttosto abbondante, i cui cristalletti mostrano gli spigoli leggermente arrotondati, indizio di lunga flu-

(<sup>1</sup>) 1836-37. — Jameson Robert, *Notes on the natural history and statistics of the island of Cerigo and its dependencies* (Edimburg New Philosophical Journ. Vol. XXI, XXII).

(<sup>2</sup>) 1899. — R. Leonhard, *Die Insel Kythera.* (Petersmanns Mitteilungen Ergänzungsschrift; n. 128, p. 7 e seg.).

tazione, avendo lo *zircone* il n. 7 della scala delle durezze. Inoltre si trova la *tormalina* bruna, estremamente rara; il *granato* in frammenti, molto raro; forse l'*amfifolo* verde; la *biotite*; la *muscovite*; la *magnetite*, rara; probabilmente la *cloritoide*: un granulo molto più grosso degli altri, quasi opaco, ha un accenno al pleocroismo dal verde oliva al verde bluastro con indice di rifrazione superiore a 1,66.

Molti altri granuli sono indeterminabili e per la loro piccolezza e per la loro alterazione.

Questi elementi accennano a derivazione dalle rocce cristalline segnalate a nord dell'isola e pur frequenti, anche con *glaucofane*, nelle isole e nella terra ferma circonvicine.

Quei campioni di rocce che mostransi molto calcarei sono specialmente costituiti da materiali frammentizi d'origine organica, fra i quali in prevalenza sono le *nullipore*, nonchè numerosi frammenti di anellidi del gen. *Ditrupa* e *Protula* e frammenti di briozoari.

La compattezza di queste rocce è piuttosto variabile, poichè talora, quando sono molto sabbiose, sono facilmente disaggregabili; talora invece, quando l'elemento calcareo è in prevalenza, si mostrano i detriti tenacemente cementati.

In quelle prevalentemente sabbiose i piccoli *Pecten*, come il *P. scabrellus* ed il *P. opercularis* in special modo, sono così numerosi da costituire dei veri conglomerati conchigliari. Altri conglomerati sono quasi esclusivamente costituiti dal *P. Bosniaskii*.

Le specie che io ho osservato non sono molte, ma tutte di mare poco profondo: tenuto conto anche della presenza delle *nullipore*, questa formazione marina appartiene alla zona delle laminarie. Se poi si considera che delle nostre specie nemmeno la metà sono viventi; che tutte, anche quelle poche citate da Leonhard, trovansi nel pliocene, e che per di più fra queste ne abbiamo diverse che sono esclusivamente plioceniche, dobbiamo ammettere che questa formazione sia da ascriversi al pliocene, marino, litorale, per quanto si è detto, e perciò astiano, quale si conosce pure in Creta e nella vicina Morea equivalente, ma diverso dal piano *levantino* dei geologi austriaci, che è essenzialmente continentale.

Le specie sono le seguenti e di esse ho indicato solo alcune località plioceniche corrispondenti, che trovansi nelle regioni contermini.

Ho poi contrassegnato con un asterisco le specie esclusivamente plioceniche e con doppio asterisco le specie tuttora viventi. Fra le più caratteristiche del Pliocene troviamo appunto il *Clypeaster pliocenicus*, la tipica *Turritella triplicata*, il *Pecten Bosniaskii* con la var. *nigromagnus*. Il *P. latissimus*, la *Perna Soldani*, la *Venus gigas*, il *Spondylus crassicosta*, il *Clypeaster altus* trovansi anche nel Miocene. L'*Echinolampas* è nuovo.

ECHINODERMI.

\* *Clypeaster pliocenicus* Seguenza. — Questa specie, come fa notare il Seguenza (<sup>1</sup>), si distingue dal miocenico *C. altus* (Leske) per una minore elevazione, per il margine più largo ed appianato e per gli ambulacri meno estesi e meno sporgenti. Questi caratteri compariscono direttamente nei nostri esemplari.

Fra i *Clypeaster* del pliocene di San Miniato (Toscana), che si trovano nel Museo geologico di Firenze, molti dei quali riferibili al *C. pliocenicus*, ho notato un esemplare di questa forma che era stato dal Désor denominato *in schedis C. Etruscus*.

Debo notare come il *C. aegyptiacus* Wright delle sabbie di Gizeh in Egitto, ritenute plioceniche dal Beyrich, è sinonimo di *C. pliocenicus* Seguenza, come mi risulta dall'esame di esemplari originali.

La specie secondo il Seguenza è caratteristica del pliocene inferiore della Calabria. Probabilmente è stata indicata a Creta insieme alla specie seguente col nome unico di *C. altus* (<sup>2</sup>).

*Clypeaster altus* (Leske). — Due esemplari distinguibili dalla specie precedente per la loro forma più elevata e per il margine non appianato. Questa specie come fa notare il Simonelli (<sup>3</sup>) era considerata come caratteristica del miocene prima che egli la trovasse nel pliocene di Pianosa. Esemplari riferibili a questa forma, come ho potuto anch'io osservare fra i *Clypeaster* di San Miniato, si mostra abbastanza frequentemente nei terreni che sono senza dubbio pliocenici.

È stato indicato a Creta dal Simonelli (<sup>4</sup>) e dal Michelin.

\* *Echinolampas cythereus* Stefanini (in schedis). — Un solo esemplare assai ben conservato, per quanto non intero. È forma nuova che verrà illustrata prossimamente dal dott. Stefanini.

BRIOZOARI.

\* *Membranipora aperta* Bk. — Due esemplari.

\*\* *Myriosoum truncatum* Pallas. — Diversi frammenti.

(<sup>1</sup>) 1877-1880. Seguenza G., *La formaz. terz. nella prov. di Reggio (Calabria)*, Reale Acc. dei Lincei, pag. 215

(<sup>2</sup>) 1862. — Michelin M., *Monographie des Clypéastres fossiles* (Mém. de la Soc. géol. de France. 2<sup>a</sup> série, tome VII, pag. 124).

(<sup>3</sup>) 1889. — Simonelli V., *Terreni e fossili dell'isola di Pianosa nel Mar Tirreno* (Boll. del R. Com. geol., pag. 35).

(<sup>4</sup>) 1894. — Simonelli V., *Appunti sulla costituzione geologica dell'isola di Candia* (R. Acc. d. Lincei, vol. III, serie 5<sup>a</sup>, pag. 265).

\*\* *Cribrillina* cfr. *radiata* Moll. — Un esemplare; non è però troppo ben conservato per una sicura determinazione.

*Schizoporella* sp. — Un gruppo di zoecri, che per la loro calcificazione non sono specificamente determinabili.

#### CROSTACEI.

\*\* *Balanus spongicola* Brown. — Diversi esemplari piccoli riuniti in gruppi sopra due valve di *Pecten Bosniaskii* ed un grande esemplare sopra una valva di *P. latissimus*.

#### ANELLIDI.

\*\* *Ditrupa cornea* L. — Diversi frammenti. È indicata a Creta (Bonarelli) (¹).

*Protula Isseli* Rovereto. — Un esemplare e dei frammenti.

#### GASTEROPODI.

*Fusus* sp. — Un esemplare non determinabile.

\*\* *Cerithium (Biltium) reticulatum*. Da Costa var. *scabra* Oliv. — Qualche impronta.

\* *Turritella triplicata* Brocchi. — Un nucleo ed un' impronta.

\*\* *Vermetus arenarius* L. — Un nucleo.

#### LAMELLIBRANCHI.

\*\* *Ostrea pusilla* Brocchi = *O. stentina* Payradeau. — Sono individui di grandissime dimensioni, allungati, solidissimi come l'*O. crassissima* Lk., il cui tipo credo limitato al Miocene. Da giovani evidentemente debbono avere altra forma. Appartengono al tipo delle *Ostreæ* allungate pur viventi nel Mediterraneo e fossili nel Pliocene, tipo parallelo e diverso da quello dell'*O. edulis*. Credo che la *Pycnodonta pedemontana* Mayer, l'*Ostreola Forskalii* Chemn., l'*Ostreola pusilla* Br. e la *Crassostrea crassissima* Lk. *pro parte* di Sacco siano tutti sinonimi.

Il nome di *O. pusilla* Brocchi sarebbe veramente il più antico e dovrebbe essere preferito a tutti, sebbene prescelto per individui giovanissimi appena sviluppati. In altro mio lavoro trattando della questione avevo fatto notare come l'*O. plicata* Chemn. e l'*O. plicatula* Gmel., nomi più antichi

(¹) 1901. — Bonarelli G., *Appunti sulla costituzione geologica dell'isola di Creta* (Atti della R. Acc. dei Lincei, vol. III, serie 5<sup>a</sup>, pag. 537).

di quello del Brocchi, e adottati da molti autori per forme simili viventi, non possano esser riferibili alla specie vivente nel Mediterraneo secondo le figure di Chemnitz e quella del Gualtieri alla quale lo Chemnitz si riferisce.

Feci anche notare come il nome di *O. plicatula* sia insostenibile; per cui adottai per la specie vivente nel Mediterraneo e nell'Adriatico il nome di *O. stentina* Payr. (¹). È indicata nella Morea (Deshayes), come pure a Candia col nome di *Ostrea crassissima* Lk. (Simonelli).

\*\* *Ostrea lamellosa* Brocchi. — Alcuni esemplari, uno dei quali con ambedue le valve. È indicata a Creta da Bonarelli (pag. 538), nella Morea da Deshayes (pag. 125). Alcuni la ritengono riferibile alla *O. edulis* L. vivente.

\*\* *Anomia ephippium* L. var. *sulcata* Poli. — Un esemplare rappresentato da una valva sinistra.

*Spondylus crassicosta* Lk. — Tre valve ed un nucleo. È indicato nel pliocene della Morea (Deshayes) (²), come pure a Cerigo (Leonhard) col nome di *S. quinquecostatus* Desh. (³).

\*\* *Pecten (Aequipecten) opercularis* L. var. *Audoini* Pay. — Specie abbondantissima. Bonarelli la cita pure a Creta col nome di *P. Audoini*.

\* *Pecten (Aequipecten) scabellus* Lk. (= *P. Pandorae* Desk.). — Alcuni esemplari, i quali più che alla forma tipica pliocenica sono rispondenti alla forma di Monte Mario, figurata da Cerulli-Irelli (⁴), per ciò, salvo il minor numero delle coste vicini al *P. opercularis*.

Il Sacco fa notare come il *P. Pandorae* Desh. debba conservarsi come un esemplare non completamente adulto di *P. scabellus*. Leonhard cita la specie a Citera (*P. Pandorae*) ed il Bonarelli a Creta (*P. sarmenticus* Goldf.), dove è indicata pure dal Simonelli.

\* *Pecten (Flabellipecten) Bosniaskii* De Stef. e Pant. — È specie abbondantissima. I nostri esemplari sono riferibili in parte, quelli di minori dimensioni, al tipico *P. Bosniaskii*, in parte gli esemplari grandi, al *P. nigromagnus* Sacco. Le graduazioni di forma che presentano fra l'uno e l'altro tipo non permettono di distinguere quest'ultimo come specie diversa, ma tutto al più può ritenersi come una varietà della specie, come l'aveva dapprima ritenuta il Sacco (pag. 75).

Debbo notare fra i nostri esemplari un individuo completo con ambedue le valve, un angolo apicale meno ottuso e con valva inferiore la quale pre-

(¹) 1900. — Nelli B., *Fossili miocenici dell'Appennino aquilano* (Boll. Soc. geol. it., vol. XIX, pag. 384).

(²) 1883 — *Expédition scientifique de Morée*. Tome III, Mollusques par Deshayes, pag. 121.

(³) Ibid.

(⁴) 1907 — Cerulli-Irelli, *Fauna malacologica mariava*. Parte prima. Palaeontografia Italica, vol. XIII, tav. V, fig. 5.

senta sul lato posteriore due costole solcate e tutte più o meno evidentemente striate longitudinalmente; però il numero delle coste non essendo diverso da quello della specie citata, e non avendo fra i tanti che un solo esemplare, non credo poterlo tenere distinto con sicurezza, tanto più che anche il *P. flabelliformis* Br., donde questa specie deriva, presenta talora simili strie.

*Pecten (Macrochlamys) latissimus* (Br.). — Un grande esemplare con ambedue le valve. È indicato a Candia (Simonelli) e nella Morea col nome di *P. laticostatus* Lk. (Deshayes).

\*\**Pecten jacobaeus* L. — Una valva superiore. È indicato nella Morea da Deshayes.

*Perna Soldanii* Desh. — Alcuni esemplari.

\**Mytilus scaphoides* Brn. — Una valva destra.

\*\**Pectunculus pilosus* L. — Un nucleo.

\*\**Chama gryphina* Lk. — Un nucleo.

*Venus gigas* Lk. (*V. umbonaria* Lk. et auct.). — Due grandi esemplari rappresentati da nuclei.

\**Glycymeris Faujasi* Mén. — Un esemplare.

\*\**Lucina fragilis* Phil. — Un nucleo di valva sinistra.

#### VERTEBRATI-CETACEI.

*Balaenoptera* sp. — Una cassa timpanica.

**Mineralogia.** — Minerali che accompagnano il giacimento ferifero della Buca della Vena presso Stazzema (Alpi Apuane) (¹). Nota di U. PANICHI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

La Buca della Vena, nota soprattutto come giacimento di magnetite con ematite e limonite, è citata anche, da A. D'Achiardi, come « esempio di associazione della calcite alle masse ferree » (²), in modo analogo a quanto accade a Campiglia ed a Rio Marina.

Recenti scavi hanno messo a nudo nuove cristallizzazioni, ed in una mia visita ne ho raccolti vari campioni che mi sembrano non indegni di un breve cenno.

**Massa dominante.** — Si tratta di una formazione di sostanza complessivamente rosso-bruna, interposta fra la roccia calcarea e la massa del minerale di ferro. La parte predominante è cristallina, a grandi scaglie, lucen-

(¹) Al prof. F. Millosevich, nel cui Gabinetto in Firenze ho eseguito in gran parte questo lavoro, pongo i più vivi ringraziamenti.

(²) *Mineralogia della Toscana*, vol. I, pag. 154.

tezza sub-resinosa, struttura cavernosa, colore rosso-bruno. Si scioglie con facilità e con effervescenza in HCl diluito, dando non poco residuo bruno; si scioglie senza residuo in HCl a caldo, ed ha fornito la seguente composizione <sup>(1)</sup>:

Ca O . . . . .	52,58
Fe O . . . . .	1,21
MnO . . . . .	0,98
CO <sub>2</sub> . . . . .	43,10
H <sub>2</sub> O . . . . .	<u>2,46</u>
	100,33

La sostanza dunque è essenzialmente una calcite ferro-manganesifera, ed è notevole la quantità d'acqua che essa contiene. Il suo peso specifico, determinato sulla polvere, ha dato 2,88. Il romboedro di sfaldatura ottenuto rompendo le scaglie, ha dato, come media di quattro misure, 74°,48',20".

*Druse di calcite.* — Molte cavità della massa suddetta, sono tappezzate di cristalli ora limpidi ed incolori, ora bruno-rossastri. Questi due tipi non sono fra loro mescolati, ma occupano plaghe distinte; gli uni e gli altri hanno abito romboedrico.

I cristalli bruni (lunghezza media 3-6 mm.) hanno faccie piane ma poco lucenti, anzi quasi spulte, e minutamente porose; presentano tutti la combinazione delle due sole forme:

$$f = 1\bar{1}1 (02\bar{2}1) , \quad a = 10\bar{1} (11\bar{2}0),$$

delle quali la prima ha sempre il maggiore sviluppo. Lo spigolo polare di {111} è molto prossimo a 101°,9', e perciò si tratta di calcite e non di siderite.

I cristalli incolori sono di calcite pura, ed in essi ho riconosciute le seguenti forme:

$$\begin{aligned}\{55\bar{7}\} &\equiv \{04\bar{4}1\} \\ \{100\} &\equiv \{10\bar{1}\bar{1}\} \\ \{110\} &\equiv \{01\bar{1}2\} \\ \{15.3.\bar{9}\} &\equiv \{4483\} \\ \{50.30.54\} &\equiv \{7.28.\bar{5}\bar{5}.9\} \\ \{10\bar{1}\} &\equiv \{11\bar{2}0\}\end{aligned}$$

Di queste, la predominante è sempre il romboedro inverso {557}, già noto per la calcite ( $\eta$  di Hauy), ma alquanto raro (mentre è assai frequente

(1) L'anidride carbonica è qui determinata col metodo di Fresenius-Classen. Calcolandola sulle percentuali delle basi, sarebbe 42,85 %, e perciò il totale diverrebbe 100,08. L'acqua perduta per calcinazione dalla sostanza (polverizzata e tenuta otto giorni in esiccatore), venne raccolta in tubo a cloruro di calcio saturato precedentemente d'anidride carbonica.

il suo corrispondente diretto). La sua posizione è assai vicina a quella del romboedro inverso  $\{1\bar{1}\bar{1}\}$  frequente nella calcite e presente nella calcite bruna or ora descritta; però se ne distingue in modo netto perchè più allungato (l'angolo polare differisce, nelle due forme, di oltre  $13^\circ$ ). Le facce di  $\{5\bar{5}\bar{7}\}$  sono lucenti e piane, talvolta anche un po' curve in vicinanza degli spigoli che esse fanno colle facce di  $\{10\bar{1}\}$ , talchè al goniometro si hanno sfumature d'immagini che nella misura dello spigolo polare porterebbero ad angoli maggiori (fin verso i  $116^\circ$ - $117^\circ$ ).

Il romboedro diretto  $\{100\}$  accompagna spesso la forma predetta, e a volte prende un discreto sviluppo; secondo le sue facce, sempre piane e lucenti, i cristalli si sfaldano con facilità, i suoi spigoli polari sono spesso troncati da faccette piccolissime ma brillanti di  $\{110\}$ .

Lo scalenoedro diretto  $\{15.3.\bar{9}\}$  è assai frequente, ma ha facce poco lucenti.

Lo scalenoedro inverso  $\{50.30.\bar{5}\bar{4}\}$  l'ho osservato soltanto su due cristalli e con minimo sviluppo. Al goniometro riflessi sfumati, ma certi.

Valori misurati	N.	Valori estremi	Medie	Valori calcolati
$5\bar{5}\bar{7} : 100$	2	$59.2'' - 59.26''$	$59.14''$	$58.59'.7''$
$5\bar{5}\bar{7} : 5\bar{7}5$	3	113.18-116.00	114.35	114.10.18
$15.3.\bar{9} : 15.9.3$	2	54.01-54.32	$54.16\frac{1}{2}$	54.29.40
$50.30.\bar{5}\bar{4} : 50.\bar{5}\bar{4}.30$	2	92.45-93.17	93.01	93.17.12

*Manganite.* — Tutta la massa è attraversata in vari sensi da vene di sostanza bruna, o nera, che in alcuni punti è pulvulenata, in altri ha lucentezza quasi metallica. Questa sostanza è in gran parte manganite: infatti in acido cloridrico a caldo sviluppa cloro; dalla soluzione precipita abbondante il manganese; scaldata in tubo chiuso, perde acqua. È intimamente commista colla calcite ferro-manganesifera; anzi talvolta si può osservare la manganite che pseudomorficamente assume facce ed angoli del romboedro di sfaldatura della calcite.

*Wad.* — Colle vene di manganite è spesso associata una sostanza più bruna che si presenta concrezionata in minimi grani a struttura fibroso-raggiata ed anche come polvere nero-violacea vellutata. Essa, per solito, ricopre come un tappeto soffice e granulare la superficie di una calcite bianca compatta, minutamente saccaroide, in contatto colla manganite. Parmi che possa definirsi come wad, giacchè anch'essa è essenzialmente un minerale di manganese; nel tubo chiuso perde molta acqua, e dalla sua soluzione si ebbero deboli tracce di bario. È da notare che nella calcite bianca suddetta si trovano anche piccole venuzze di barite bianca. Le sferule fibroso-raggiate hanno spesso esternamente lucentezza metallica.

*Magnetite. Siderite manganesifera.* — Sparsi nella manganite si trovano cristalletti ottaedrici di magnetite; si trovano pure cristalli romboedrici di una siderite bruna, quasi nera (angolo di sfaldatura circa 73°), che, con saggi qualitativi, ho riscontrato essere ricca di manganese.

*Orneblenda.* — Nel wad pulverulento si trovano esili e rari cristallini neri prismatici, privi di faccie terminali, che al goniometro danno l'angolo di circa 55°, riferibili all'amfibolo. Detti cristallini sono in parte anche cloritizzati.

*Rodocrosite.* — Sopra le incrostazioni di wad stanno a volte adagiate delle graziose cristallizzazioni costituite da piccoli gruppi di minutissimi cristallini con lucentezza vitrea e color roseo. Al microscopio essi appaiono ricchi di faccette brillanti; ma, data la loro piccolezza, non ho potuto studiarli cristallograficamente. E nemmeno, per la esigua quantità disponibile, ho pututo farne l'analisi chimica quantitativa; ma tutto mi porta a ritenere che si tratti di rodocrosite, della quale detti cristalli hanno l'aspetto e i caratteri. Infatti, un frammento, in tubicino con HCl, appena esposto alla fiamma, sprigionò una vistosa effervescenza; con la perla di sal di soda ebbi evidente reazione del manganese. Inoltre otteuni deboli tracce di ferro, e tracce decise di calcio.

Al microscopio sembra confermata la presenza del calcio; infatti la polvere, trattata su vetrino con acido solforico concentrato, a freddo, produsse per lenta evaporazione cristalli allungati, debolmente rosei, di aspetto clinodrico, riuniti in gruppi per lo più raggiati; e, fra questi, altri cristallini esili ed incolori. I primi possono essere dovuti a formazione di solfato manganese, o a qualche polisolfato di manganese e calcio o ferro; i secondi si presentano coi caratteri di cristalli di gesso.

Abbiamo dunque una rodocrosite calcifera, cioè un tipo comune di rodocrosite; ma essa è nuova per la regione. La sola rodocrosite, fin qui nota in Toscana, è quella zincifera di Rosseto (Elba), che solo da pochi mesi è stata descritta dal Manasse (¹).

(¹) *Sopra alcuni minerali della Toscana.* Mem. Soc. Tosc. Sc. nat., XXVII, Pisa 1911. L'A. cita, e a lui rimando, per le altre rodocrositi italiane, le pubblicazioni di Jervis, Fuchs e De Launay, Colomba, Millosevich.

Chim ca. — *Sulla capacità degli alogenuri potassici di dare soluzioni solide, in rapporto colla temperatura.* Nota II<sup>a</sup> di M. AMADORI e G. PAMPANINI (<sup>1</sup>), presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

**II. Analisi termica.** — In una Nota precedente (<sup>2</sup>) abbiamo riferito il comportamento delle coppie KCl-KBr, KBr-KI, KCl-KI riguardo alla solubilità allo stato solido a bassa temperatura; riferiamo ora le esperienze eseguite allo stesso scopo ad alta temperatura con il mezzo dell'analisi termica.

Le esperienze vennero condotte fondendo le miscele dei due sali in un crogiolo di platino posto entro un secondo crogiolo di porcellana. Per mezzo di un forno elettrico a resistenza di filo di nickel costruito in laboratorio, la miscela veniva portata 50-60 gradi sopra il punto di fusione e quindi raffreddata lentamente. Alle temperature raggiunte le miscele dei due sali erano stabili e non volatilizzavano, pure usando il crogiolo aperto.

La temperatura veniva letta mediante un termoelemento Pt-PtRd immerso direttamente nella massa e un galvanometro Siemens ed Halske.

La quantità di miscela usata in ogni fusione era di 15 gr.

I punti di fusione dei tre sali puri risultarono:

KCl . . . . .	774°
KBr . . . . .	740°
KI . . . . .	680°

Nessun punto di trasformazione si osserva termicamente lungo il raffreddamento.

### 1. KCl-KBr.

Il punto di solidificazione del bromuro viene lievemente abbassato per aggiunta di cloruro, la temperatura scende da 740° a 734°: alla stessa temperatura si giunge dal punto di solidificazione del cloruro puro per aggiunta di bromuro. La curva di cristallizzazione che si ottiene è una curva a minimo quasi piatto per cui riesce impossibile stabilire a quale concentrazione esso si trovi: esso giace tra 30 e 40 mol. % di KCl ed è solo 6 gradi più basso del punto di solidificazione del bromuro.

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(<sup>2</sup>) Questi Rendiconti XX, II, 478, (1911).

Le curve di raffreddamento per le singole miscele mostrano nella solidificazione un solo rallentamento; esso s'avvicina molto ad un arresto, poichè dura al più 10-12 gradi; non si può quindi tracciare una seconda curva di cristallizzazione che ne indichi il termine. Nessun altro arresto o rallentamento si osserva anche quando si segua il raffreddamento fino a 200°.

Dalle curve di raffreddamento e dal diagramma di stato risulta che cloruro potassico e bromuro potassico ad alta temperatura danno cristalli misti in tutti i rapporti con leggero minimo.

TABELLA 1<sup>a</sup>. — KCl-KBr.

Numero	% in peso		% molecolare		Temperatura di cristallizzazione
	KCl	KBr	KCl	KBr	
1	0	100	0	100	740
2	10	90	15.07	84.93	736
3	20	80	28.53	71.47	734
4	30	70	40.62	59.38	735
5	40	60	51.56	48.44	737
6	50	50	61.49	38.51	739
7	60	40	70.55	29.45	745
8	70	30	78.84	21.16	752
9	80	20	86.4	13.54	758
10	90	10	93.51	6.49	767
11	100	0	100	0	771

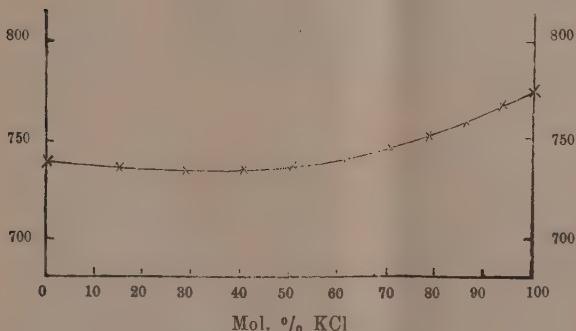


FIG. 1. — KCl-KBr.

La curva di cristallizzazione primaria tracciata da Ruff e Plato è assai simile alla nostra; il minimo è circa 10 gradi più basso del punto di solidificazione del bromuro e corrisponde a una concentrazione di circa 33 mol. % KCl.

## 2. KBr-KI.

Questa coppia si comporta in modo analogo alla precedente. La miscibilità allo stato solido ha luogo in tutti i rapporti. La curva di cristallizza-

zione ha un minimo un po' più accentuato a  $664^{\circ}$ , cioè 16 gradi più basso del punto di solidificazione dell'ioduro: questo minimo corrisponde a una concentrazione di 35-40 mol. % KBr.

Lungo il raffreddamento successivo alla solidificazione fino a  $200^{\circ}$  non si osserva nella temperatura nessun arresto o rallentamento anche adoperando una quantità maggiore di miscela (30 gr.)

Nella curva di cristallizzazione primaria di Ruff e Plato il minimo non esiste; la temperatura di solidificazione si mantiene costante dal punto di solidificazione dell'ioduro a 30 mol. % KBr.

TABELLA 2<sup>a</sup>. — KBr-KI.

Numero	% in peso		% molecolare		Temperatura di cristallizzazione
	KBr	KI	KBr	KI	
1	0	100	0	100	680
2	5	95	6.84	93.16	675
3	10	90	13.41	86.59	672
4	15	85	19.75	80.25	668
5	20	80	25.85	74.15	665
6	25	75	31.70	68.30	664
7	30	70	37.41	62.59	664
8	40	60	48.18	51.82	670
9	50	50	58.24	41.76	676
10	60	40	67.66	32.34	684
11	70	30	76.49	23.51	697
12	80	20	84.80	15.20	71 <sup>0</sup>
13	90	10	92.62	7.38	724
14	100	0	100	0	740

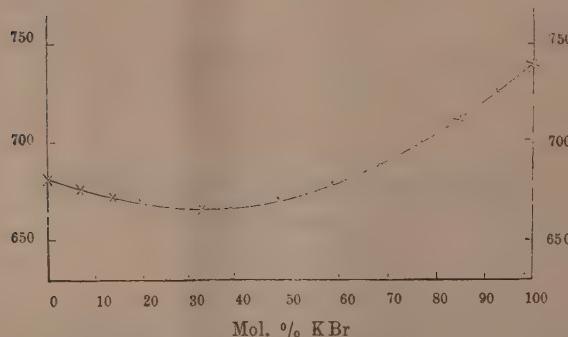


FIG. 2. — KBr-KI.

## 3. KCl-KI.

Per questa coppia di sali la miscibilità allo stato solido alle temperature di solidificazione non è completa.

TABELLA 3<sup>a</sup>. — KCl-KI.

Numero	% in peso		% molecolare		Temperatura di cristallizzazione	Temperatura d'arresto eutettico	Durata in secondi per 15 gr. di miscela
	KCl	KI	KCl	KI			
1	0	100	0	100	680°	—	—
2	5	95	10.49	89.51	659-639	—	—
3	10	90	19.83	80.17	636-621	—	—
4	15	85	28.22	71.78	623-610	—	—
5	20	80	35.76	64.24	609-603	—	—
6	25	75	42.60	57.40	602	—	—
7	28	72	46.41	53.59	600	—	—
8	30	70	48.83	51.17	600	600	300
9	35	65	54.53	45.47	622	600	250
10	40	60	59.75	40.25	640	600	160
11	50	50	69.00	31.00	672	598	80
12	60	40	76.96	23.04	698	599	50
13	70	30	83.86	16.14	721	598	30
14	80	20	89.90	10.10	741	597	10
15	82	18	91.00	9.00	745	—	—
16	85	15	92.66	7.34	750 - 668	—	—
17	90	10	95.25	4.75	758 - 726	—	—
18	100	0	100	0	774	—	—

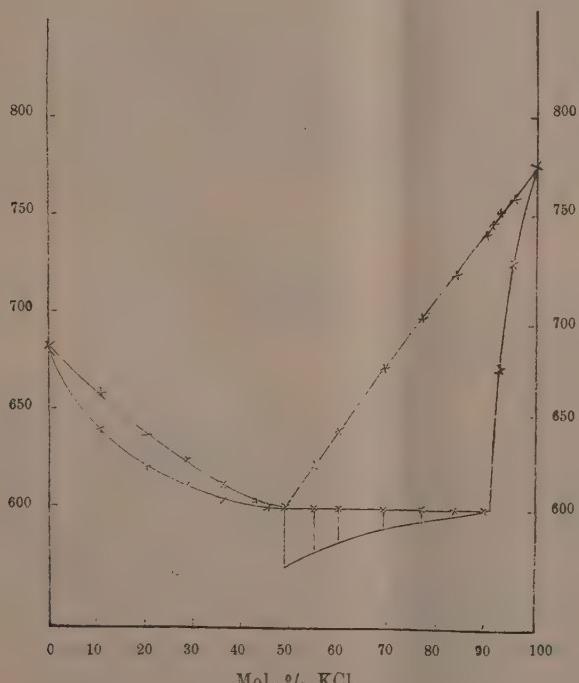


FIG. 3. — KCl-KI.

Per concentrazioni da 0 a 49 mol. % di KCl la formazione di cristalli misti verosimilmente ha luogo in tutti i rapporti. Da 0 a 36 mol. % nelle curve di raffreddamento si osserva l'inizio e la fine di cristallizzazione e la mancanza di arresti eutettici; da 36 a 49 mol. % l'inizio di cristallizzazione è al massimo superiore di soli 10 gradi alla temperatura eutettica, l'arresto eutettico qualora esistesse andrebbe confuso con la cristallizzazione primaria; però data la forma della curva di cristallizzazione primaria e le differenze assai piccole nelle temperature di cristallizzazione da 36 a 49 mol. % si può escludere la formazione di miscele eutettiche anche in questo intervallo.

Le miscele ricche in cloruro danno cristalli misti in rapporti limitati: da 49 a 91 mol. % di KCl le curve di raffreddamento indicano un rallentamento all'inizio di cristallizzazione e un arresto eutettico alla temperatura di 600°: da 91 a 100 mol. % si osserva solo un intervallo di cristallizzazione e nessun arresto eutettico.

La miscibilità tra cloruro potassico e ioduro potassico è limitata quindi da 0 a 49 e da 91 a 100 mol. % di KCl. Nelle curve di raffreddamento non si osserva alcun arresto o rallentamento a temperature inferiori all'eutettica fino a 200°, anche adoperando maggiori quantità di miscela.

La nostra curva di cristallizzazione primaria, fatta eccezione dei valori assoluti delle temperature, è in buon accordo con quelle di Ruff e Plato (temperatura minima d'inizio di cristallizzazione di 65 gradi più bassa del punto di fusione dell'ioduro, a una concentrazione di 47 mol. % KCl), e con quella di Le Chatelier (<sup>1</sup>) (temperatura minima inferiore di 60 gradi a 50 mol. % KCl). Le esperienze di questi autori, per il modo come furono condotte, si prestavano a interpretazioni sbagliate: infatti la coppia KCl-KI è citata da Roozeboom (<sup>2</sup>) come esempio di semplice eutettico.

#### CONCLUSIONI.

Riassumiamo brevemente i risultati delle esperienze riferite in questa Nota e nelle precedenti:

1. KCl-KBr: a bassa e ad alta temperatura sono miscibili in ogni rapporto.

2. KBr-KI: a bassa temperatura la miscibilità è limitata (0-24 mol. % KBr in KI; 0-7 mol. % KI in KBr): ad alta temperatura la miscibilità è completa.

3. KCl-KI: a bassa temperatura sono miscibili in rapporti assai limitati (0-7 mol. % KCl in KI; 0-1 mol. % KI in KCl): ad alta temperatura la miscibilità è maggiore ma non completa (0-49 mol. % KCl in KI; 0-9 mol. % KI in KCl).

(<sup>1</sup>) Vedi Nota precedente.

(<sup>2</sup>) *Heterogene Gleichgewichte*, II, 238.

In questi due ultimi casi la temperatura porta un notevole aumento nella solubilità allo stato solido; nella seconda coppia si giunge alla miscibilità completa; nella terza a una miscibilità molto superiore che a bassa temperatura.

Non possiamo però dire fino a quale temperatura si mantenga la solubilità per la coppia KBr-KI, nè come proceda lo smistamento dei cristalli misti per la coppia KCl-KI, perchè, come fu già detto, dopo la cristallizzazione non si osserva alcun arresto o rallentamento di temperatura che corrispondano ai suddetti fenomeni.

Rimane ora a considerare il grado di miscibilità dei tre sali in rapporto alla loro natura chimica e cristallografica.

Il cloruro, il bromuro e l'ioduro di potassio cristallizzano nella classe oloedrica del sistema cubico, in tutti tre la forma che predomina è il cubo; cristallograficamente quindi i tre sali, come in generale le sostanze appartenenti al sistema regolare, sono completamente isogoni e nessuna relazione si può stabilire tra la forma cristallina e la capacità di dare soluzioni solide. Si può solo osservare che la lacuna di miscibilità per le coppie KBr-KI e KCl-KI non è dovuta ad isodimorfismo e i cristalli misti sono di un unico tipo.

La miscibilità allo stato solido al contrario è in relazione con le proprietà fisiche e chimiche dei tre sali. Nel loro gruppo gli alogenri si seguono secondo il peso atomico Cl, Br, I: nelle loro proprietà e in quelle dei loro derivati il cloro e il bromo si scostano meno tra loro che non il bromo e l'iodio; in grado assai maggiore si scostano il cloro e l'iodio. Ricorderemo inoltre i volumi molecolari di questi tre sali alogenici di potassio:

KCl	V. M. 37.11	differenza 5.79	differenza 15.46
KBr	" 42.90		
KI	" 52.57		

le differenze tra i volumi molecolari sono maggiori tra cloruro e ioduro, minori tra cloruro e bromuro.

In accordo con quanto precede sta la miscibilità allo stato solido: completa a bassa e ad alta temperatura per la coppia KCl-KBr; completa solo ad alta temperatura per la coppia KBr-KI; limitata anche ad alta temperatura per la coppia KCl-KI.

E poichè la miscibilità allo stato solido è misura del grado di isomorfismo, possiamo dedurre che tra KCl e KBr l'isomorfismo è completo, tra KBr e KI l'isomorfismo completo si raggiunge solo ad elevate temperature, per KCl-KI non è possibile, per lo meno a pressione ordinaria, raggiungere il completo isomorfismo.

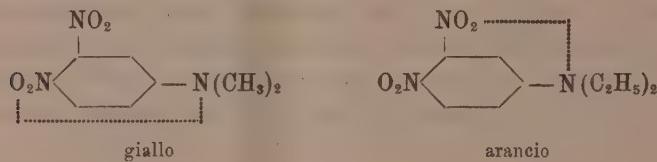
Chimica. — *Nitroderivati e nitroidrazoni*<sup>(1)</sup>. Nota di R. CIUSA,  
presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Un caso che può presentarsi in molte sostanze è che nella stessa molecola si trovino contemporaneamente gruppi nitrici e uno di quegli aggregamenti caratteristici delle sostanze capaci d'addizionarsi ai nitroderivati. Qui mi limito a considerare sotto questo punto di vista le nitroaniline ed i nitroidrazoni aromatici.

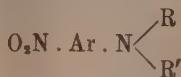
Il caso delle nitroaniline è stato, si può dire, trattato in questi ultimi tempi da A. Hantzsch (2): queste nitroaniline esistono in diverse modificazioni di differente colore (*cromoisomeria*) o dello stesso colore (*omocromoisomeria*). In alcuni casi si presentano contemporaneamente le due isomerie.

La cromoiosomeria delle nitroaniline può essere prodotta secondo Hantzsch da due differenti cause.

Nelle m-p-dinitroaniline a seconda che è il gruppo nitrico in posizione *para* o quello in *meta* che si unisce per valenze secondarie ai gruppi auxocromici si hanno i due cromoisoomeri, per es.:



Nelle p-nitroaniline la causa della cromoisoомерia, che è stata osservata soltanto in quelle a struttura *asimmetrica* della forma,



va ricercata nel fatto che al gruppo nitrico può essere unito per valenze secondarie uno o l'altro dei radicali RR' secondo lo schema



<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

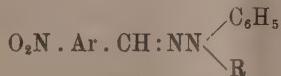
<sup>(8)</sup> A. Hantzsch e P. W. Robertson, Berichte 43, 106. Vedi anche A. Hantzsch e Meisenburg, Berichte 43, 95; A. Hantzsch, Berichte 43, 1651, 1662, 2512.

Se ora si osservano i fenilidrazoni, metilfenilidrazoni e difenilidrazoni delle tre nitrobenzaldeidi, si vede subito che la cromoisomeria presso gli idrazoni è un fenomeno ugualmente frequente come presso le nitroaniline.

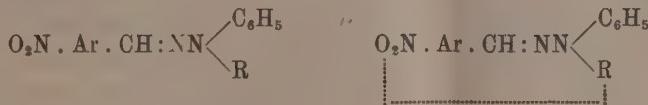
	Colore dei fenilidrazoni	Colore dei metilfenilidrazoni	Colore dei difenilidrazoni
o-Nitrobenzaldeide	rosso-vivo —	rosso-vivo —	arancio —
m- " "	— arancio giallo ? (*)	rosso (**) giallo	— giallo-chiaro
p- " "	rosso-vivo giallo (**)	rosso (**) giallo	— giallo-bruno

A questi si possono aggiungere molti altri esempi: in generale gli idrazoni delle nitroaldeide aromatiche esistono nella forma rossa, gialla o arancio senza che queste differenti colorazioni possano sempre attribuirsi alla differente posizione del gruppo nitrico.

Secondo me per un nitroidrazone della forma



si può prevedere l'esistenza di due cromoisomeri in questo modo: che il nitroidrazone possa dar luogo o no ad un prodotto d'addizione interno secondo lo schema:



Tutte le proprietà degli idrazoni e dei nitroidrazoni si accordano infatti con questo modo di vedere.

Che la formazione di un composto d'addizione interno sia possibile, lo si può ammettere dalla tendenza spiccata degli idrazoni in genere a dare

(\*) Il fenilidrazone della m-nitrobenzaldeide di color arancio non si riesce a sdoppiare nelle due forme gialla e rossa nelle quali esiste secondo ogni probabilità: sono riuscito ad ottenerlo soltanto in una forma un poco più gialla; la differenza di colore è però così poco marcata che non si può con sicurezza affermarne l'esistenza: non dispero di riuscire a separare le due forme.

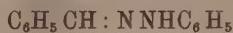
(\*\*) Il fenilidrazone del p-nitrobenzaldeide è descritto come formato da aghetti rossi: si può ottenere però in una forma gialla labilissima e la trasformazione di questa forma nella rossa, che avviene in pochi minuti, è uno dei fenomeni più interessanti della chimica.

(\*) Forma meno stabile: R. Ciusa e M. Padoa, Rendiconti Acc. Lincei, vol. XVIII, 2º sem., pag. 621.

(\*) Labilissimo: R. Ciusa e M. Padoa, Rendiconti Acc. Lincei, id. id.

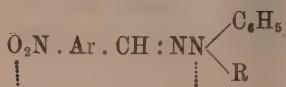
dei composti d'addizione coi derivati del trinitrobenzolo (<sup>1</sup>) dinitrobenzolo (<sup>2</sup>) e nitrobenzolo (<sup>3</sup>).

In una mia Nota (<sup>4</sup>) sui prodotti d'addizione dei nitroderivati coi fenilidrazoni ammettendo che l'unione dei due componenti avviene per valenze secondarie, in modo che tali composti sono da considerarsi come i composti complessi organici (<sup>5</sup>), ed osservando che a seconda che si introducono nel benzalfenilidrazone

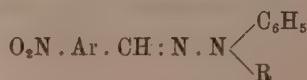


dei gruppi differenti nel resto fenilico aldeidico, od all'idrogeno terziario o nel resto fenilico idrazinico si addizionano due od una molecola di nitroderivato, sono arrivato alla conclusione che assai verosimilmente le due molecole di trinitrobenzolo si uniscono al benzalfenilidrazone — per valenze secondarie — una al gruppo fenilico aldeidico e l'altra all'azoto terziario. Per ciò mi pare giustificato l'aver ammesso che le valenze secondarie del gruppo nitrico vengono saturate, anche nel caso del prodotto d'addizione interno nei nitroidrazoni, dall'azoto terziario.

Per il fatto poi che i composti d'addizione su citati degli idrazoni coi nitroderivati aromatici sono sempre intensamente colorati — ciò che poi non è altro che un caso particolare di ciò che avviene quando entrano in gioco le valenze secondarie, la saturazione delle quali fa sì come si ammette ora o che appaia la colorazione come p. es. nei cromosali dei dinitrocarburi, o che la colorazione si faccia più intensa come è il caso di molti sali complessi — la forma rossa corrisponderà al prodotto d'addizione interno paragonabile in tutto e per tutto ad un sale complesso interno della chimica inorganica. La forma gialla corrisponderebbe invece ad una base di Schiff (colle quali si può paragonare un idrazone) e la cui colorazione sarebbe prodotta dalla presenza contemporanea dei gruppi cromosori C:N e NO<sub>2</sub>.



Forma rossa



Forma gialla

Potrà esistere una forma mista come in tanti casi analoghi studiati da Hantzsch, forma che qualche volta, come io credo che avvenga per il fenilidrazone della m-nitrobenzaldeide, corrisponderà a l'unica conosciuta.

(<sup>1</sup>) R. Ciusa, Gazz. XXXVI, 2°, 94; Rend. Acc. Lincei XVI, 1°, 409; id. id. vol. XX, 2°.

(<sup>2</sup>) R. Ciusa, Rend. Acc. Lincei vol. XVI, 1°, 409.

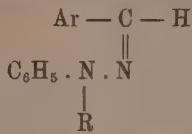
(<sup>3</sup>) R. Ciusa, Rend. Acc. Lincei vol. XVII, 1°, 372.

(<sup>4</sup>) R. Ciusa e L. Vecchiotti, Rend. Acc. Lincei vol. XX, 2°, pag. 377.

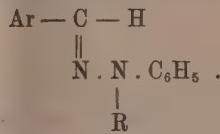
(<sup>5</sup>) Vedi a questo proposito R. Ciusa, Rend. Acc. Lincei, vol. XX, 2°.

Vi sono delle altre ragioni per le quali io credo che le cose debbano essere intese in questa maniera.

Gli idrazoni contengono un doppio legame C = N e quindi essi possono esistere secondo la teoria di Hantzsch e Werner in due forme stereoisomere.

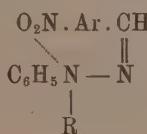


Antiidrazone (forma labile) (¹)

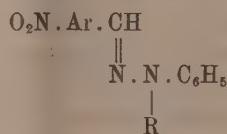


Sinidrazone (forma stabile).

Benchè questa isomeria non sia stata mai sviluppata così ampiamente come per le ossime, pure appare assai probabile che la formazione del composto d'addizione interno negli idrazoni delle nitroaldeidi possa essere accompagnata e favorita dalla disposizione degli atomi nello spazio, nel senso che alla forma rossa (composto d'addizione interno) spetti la configurazione maleoide, ed alla gialla la fumaroide

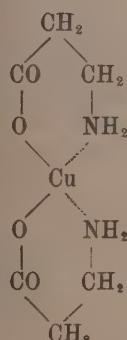
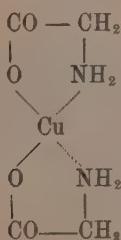


Rosso



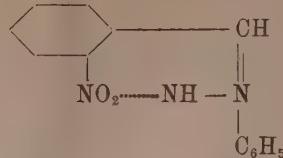
Gialla

Con questo modo di vedere sta in accordo il fatto che gli idrazoni, fenil-, e metilfenilidrazone, dell'ortonitrobenzaldeide esistono nella sola forma rossa. Secondo Tschugaefl e Werner infatti sarebbero più stabili quei sali complessi interni nei quali colla saturazione delle valenze secondarie si forma un anello a cinque od a sei atomi, come p. es. nel sale di rame della glicocolla e della  $\beta$ -alanina.



(¹) Il benzalfenilidrazone esiste come è noto in due modificazioni delle quali, l'antiidrazone, PF 136° (Thiele e Pichard B. 31, 1240) si trasforma in pochi giorni nella forma ordinaria PF 156° stabile: il sinidrazone.

L'idrazone dell' o-nitrobenzaldeide si trova infatti in queste condizioni di stabilità



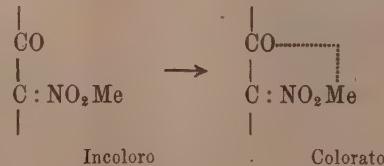
condizioni che ostacolano il passaggio alla forma fumaroide con rottura dell'anello.

L'obiezione che si può fare è però che nelle due m-nitrobenzalmetilfenilidrazone cromoisomere (<sup>1</sup>) una forma si può trasformare nell'altra per azione di determinati solventi: proprietà questa che secondo lo stesso Hahtzsche non si accorda col contegno dei corpi stereoisomeri. Bisogna però osservare che nel caso citato ci troviamo da una parte di fronte alla tendenza di questi nitroidrazoni a formare composti d'addizione interni, e dall'altra di fronte alla tendenza opposta degli idrazoni aromatici in genere a passare dalla forma malenoide (labile) alla fumaroide (stabile). È quindi naturale che il benzolo ed il cloroformio poco dissocianti favoriscano il passaggio della forma gialla della m-nitrobenzalufenilmethylidrazina nella rossa (composto d'addizione interno) e che l'alcool, più dissociante, favorisca il passaggio nella forma gialla.

La causa di questa cromoisomeria sarebbe dunque contemporaneamente isomeria geometrica ed isomeria di valenze, e corrisponderebbe sotto quest'ultimo punto di vista alla dissociazione intramolecolare che si ammette si verifichi in alcuni sali complessi interni della chimica inorganica quando cambia di colore col variare della temperatura



Qualche cosa di simile si ammette per i sali dei nitrochetoni. Questi sali esistono in una forma incolore *leucosale*, ed in una forma colorata *cromosale*; il passaggio di una forma nell'altra si spiega appunto ammettendo che nel cromosale il metallo sia unito per valenze secondarie al carbonile (<sup>2</sup>)



(<sup>1</sup>) R. Ciusa e M. Padoa, loc. cit.

(<sup>2</sup>) A. Hantzsch, Berichte 40, 1523.

Non mi pare qui fuor di luogo ricordare che assai spesso l'isomeria geometrica dovuta al doppio legame C:C e N:N è accompagnata da una variazione della colorazione: non è inverosimile ammettere per una tale variazione di colore una causa analoga a quella ammessa per i nitroidrazoni in questione.

In una Nota precedente<sup>(1)</sup> ho mostrato come i p-nitrofenilidrazoni dell'aldeide benzoica e delle tre nitrobenzaldeidi esistono ciascuno in due modificazioni cromoisomere: quelle della benzaldeide esiste in una terza (forma mista).

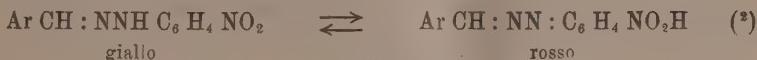
### Colore dei p-nitrofenilidrazoni

Benzaldeide	.	.	rosso	arancio	giallo
o-Nitro	"	.	rosso	aranciato	giallo aranciato
m- "	"	.	rosso	aranciato	giallo
p- "	"	.	rosso	mattone	giallo aranciato

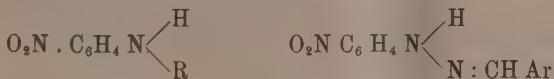
La spiegazione di questa cromoiosomeria è meno facile perchè in un'idrazone della forma



si può ammettere che il cambiamento di colore dal giallo al rosso sia dovuto alla trasformazione della forma benzoide nelle chinoiche



Se si paragonano alle p-nitroaniline di Hantzsch



si può ammettere che il gruppo nitrico in una forma sia legato per valenze secondarie all'atomo di idrogeno nell'altra all'azoto



Oltre queste si possono prendere in considerazione altre cause e perciò la questione merita uno studio ulteriore.

<sup>(1)</sup> R. Ciusa e L. Vecchiotti, *Rend. Acc. Lincei*, vol. XX, 1<sup>o</sup> sem., pag. 803.

(<sup>2</sup>) Baly J. Chem. Soc. 89, 982.

*Chimica. — Lo spettro a righe dell'azoto in tubo di Geissler<sup>(1)</sup>.*  
Nota di C. PORLEZZA, presentata dal Socio R. NASINI.

Come è noto, l'azoto fornisce diversi spettri, i quali sono stati oggetto di numerosi studi. Però, mentre lo spettro a bande è stato studiato in modo quasi completo sia sperimentalmente che teoricamente, poco è stato fatto in rapporto allo spettro a righe. Una qualche connessione con questo presenterebbe lo spettro dell'aria, studiato da diversi autori ed anche, specie in alcune parti, con sufficiente esattezza; naturalmente, però, tale studio è stato fatto facendo scoccare scintille nell'aria alla pressione ordinaria, ed inoltre non è ancora ben definita l'origine delle linee che si presentano in tale spettro.

Delle esperienze eseguite sull'azoto puro, dal punto di vista spettroscopico, poche hanno fornito risultati di una certa esattezza; questo vale principalmente per lo spettro a righe dell'azoto in tubo di Geissler, spettro che osservato inizialmente da Plücker e Hittorf<sup>(2)</sup>, non fu poi studiato che superficialmente dagli osservatori posteriori. — In conclusione per ciò che concerne l'azoto, non abbiamo che le misure di Neovius, Thalén, Huggins, Hagenbach e Konen, ed Exner e Haschek, tutte eseguite sullo spettro dell'azoto a pressione ordinaria, e solo in parte sufficientemente esatte.

Ho ritenuto quindi interessante colmare la lacuna esistente, studiando lo spettro in tubo di Geissler, sia perchè il comportamento dello spettro di un elemento a diverse pressioni può portare un notevole contributo alla conoscenza della struttura dello spettro stesso, sia anche perchè, come ho detto sopra, solo per limitate regioni dello spettro a righe dell'azoto esistono misure sufficientemente esatte.

Per le esperienze sono partito da azoto il più possibile puro; l'ho preparato impiegando il metodo di von Knorre<sup>(3)</sup>, che consiste nel riscaldare una soluzione di 1 p. NaNO<sub>2</sub>, 1-2 p. (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> e 1 p. K<sub>2</sub>CrO<sub>4</sub>; l'azoto che si sviluppava veniva poi fatto gorgogliare attraverso soluzione di acido cromico e infine, per maggiore sicurezza, lo facevo passare su rame ridotto rovente.

Poichè ho osservato che quanto maggiore è la pressione tanto più facilmente compare lo spettro a righe dell'azoto (a parità d'intensità di scarica), ho usato dei Geissler di piccole dimensioni acciocchè non fosse molto grande la distanza fra gli elettrodi e bastasse quindi un condensatore di

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Pisa.

<sup>(2)</sup> Per la bibliografia mi riferisco al Kayser-Haudb. der Spectros. Vol. V, pag. 800.

<sup>(3)</sup> Gmelin-Kraut-Handb. der anorg. Ch. Vol. I, parte I, pag. 171.

media grandezza per ottenere un brillante spettro a righe: ad essi Geissler connettevo naturalmente un palloncino di vetro per impedirne il troppo facile esaurimento; i tubi usati erano muniti di finestra di quarzo per l'osservazione dell'estremo ultravioletto. In media, i tubi vennero chiusi ad una pressione di 100 mm. circa.

Il presente studio fu eseguito con uno spettrografo a reticolo già altra volta descritto (<sup>1</sup>); le lastre fotografiche impiegate sono della ditta Wratten e Wainwright, con le quali si può giungere sino a 7000 Å; il campo dello spettro fotografato va da 6700 a 2400 Å.

Le misure sono riferite alle linee dell'elio (che ho fotografato per confronto su alcune delle lastre) e per queste ho assunto i valori dati da Eversheim (<sup>2</sup>), che alla lor volta sono riportati al nuovo valore internazionale della linea rossa del cadmio. Le misure stesse sono state eseguite con un comparatore della casa Fuess che dà  $1/1000$  di mm. e l'errore massimo che con esso si può commettere, si mantiene d'ordinario al disotto di 0.05 Å; in questo caso può darsi però che per alcune linee tale limite venga leggermente superato, giacchè nessuna, o quasi, delle righe dell'azoto da me misurate si presenta a contorni ben marcati; questo fatto risulta specialmente evidente dal confronto che ho potuto fare colle linee dell'elio (ottenute, come ho detto, su alcune lastre insieme a quelle dell'azoto), le quali invece si presentano ben marcate e nettissime.

Nella tabella che segue riporto: nelle prime colonne i dati ottenuti dai precedenti osservatori e nell'ultima i miei, tutti espressi in unità Ångstrom (<sup>3</sup>).

(<sup>1</sup>) Rendiconti Acc. Lincei, vol. XX, pag. 819 (1911).

(<sup>2</sup>) Kayser-Handbuch der Spectrosc. Vol. V, pag. 520.

(<sup>3</sup>) A scanso di equivoci, faccio osservare che parecchie delle linee dell'azoto riportate nella tabella, compaiono nello spettro dell'aria alla pressione atmosferica studiato da vari autori; di alcune righe è stata anche misurata la lunghezza d'onda con sufficiente esattezza; io però mi limito a riportare le misure eseguite da altri e da me sullo spettro dell'azoto puro, rimandando, per il confronto con lo spettro dell'aria al citato volume del Kayser, pag. 38.

AZOTO ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA								AZOTO IN TUBO DI GEISSLER			Osservazioni
Huggins	Thalén	Hagenbach e Konen	Exner e Haschek	Neovius (1)			Plücker	Porlezza			
$\lambda$	$\lambda$	$i$	$\lambda$	$\lambda$	$i$	$\lambda$	$i$	$\lambda$	$\lambda$	$i$	
6602	6602.0	6						6602	6610.06	4	
6482	6479.5	6						6480	6481.34	5	
								6376	6378.79	2	
								6358	6356.73	0	
								6341	6340.84	0	
								6288	6283.29	0	
								6249	6242.31	0	
				6249							
				6245							
6171								6165	6173.47	1	
5950	5949.0	4						6152	6167.90	1	
5942	5941.5	10	5943						5952.20	3	
5930	5932.0	10	5933						5941.49	5	
5925	5929.5	4	5930						5931.50	4	
5768	5767.0	4				5768.5	4		5927.57	3	
5746	5745.0	4				5747.5	4		5767.51	2	
5726						5731.5	1		5747.21	3	
5709	5711.0	6	5711			5712.3	7		5730.46	1	
5686	5685.5	6	5686			5683.6	6		5710.70	4	
5680	5678.0	10	5679			5679.8	10		5686.14	4	
5675	5674.5	6				5676.0	6		5679.52	6	
			5672?						5676.01	4	
5668	5666.0	10				5667.1	9		5666.54	5	
						5566.0	1				
5550	5549.0	4				5551.0	4		5551.90	2	
5541	5541.0	6				5543.0	4		5543.37	3	
						5540.0	1				
5534	5534.0	10				5535.2	7		5535.27	4	
5528	5530.0	6				5530.4	4		5530.23	3	
5524						5526.4	1		5526.24	2	
5495	5495.0	8				5496.6	7		5495.87	4	
5479	5479.0	6				5479.8	6		5480.38	2	
									5478.41	1	
5462	5461.5	4				5462.8	6		5462.82	1	
5453	5453.0	4				5453.8	6		5454.28	1	
									5452.20	1	
						5432.3	1				
						5411.1	1				
						5409.5	1				
						5401.0	1				
						5398.5	1				
						5379.0	1				
						5373.0	1				
						5367.8	1				
						5356.9	1				
5350	5351.0	2				5351.7	1		5351.34	1	
5338	5339.5	2				5339.7	1		5340.55	0	
									5338.81	0	

(1) È bene osservare che a proposito delle misure di Neovius il Kayser rileva (loc. cit., pag. 803) che nelle linee da lui date appariscono trovarsi molte righe dell'argo. Inoltre, parecchie linee possono appartenere anche all'ossigeno.

AZOTO ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA								AZOTO IN TUBO DI GEISSLER			Osservazioni
Huggins	Thalén	Hagenbach e Konen	Exner e Haschek	Neovius		Plücker	Porlezza				
$\lambda$	$\lambda$	$i$	$\lambda$	$\lambda$	$i$	$\lambda$	$i$	$\lambda$	$\lambda$	$i$	
5319	5320.0	2				5329.1	1		5320.54	0	
						5320.6	1				
						5314.5	1				
						5311.9	1				
						5281.8	1				
						5250.7	1				
						5200.9	1				
	5189.5	4				5190.9	1				
	5184.5	2				5185.0	1		5185.04	0	
									5182.86	0	
5179	5178.0	4				5180.0	6		5179.58	3	
5176						5176.7	1		5176.02	2	
5172	5172.0	2				5172.5	1		5173.34	1	
									5171.64	0	
									5168.08	0	
5071						5074.0	2		5073.74	1	
						5063.0	1				
5045	5045.0	10				5045.7	8		5045.07	4	
5024	5025.0	8				5025.8	4		5025.69	3	
						5023.3	4		5023.07	1	
5016	5016.0	6				5016.5	4		5115.65	3	
									5011.80	2	
5010	5010.0	6				5011.0	6		5010.65	4	
5007	5006.5	4				5007.8	6		5007.42	4	
5003	5005.0	10				5005.7	9		5005.12	6	
4999	5002.0	10				5002.7	9		5001.34	7	
4993	4993.5	6				4994.9	7		4994.34	4	
						4991.2	1		4991.22	1	
4986	4987.0	6				4987.6	5		4987.22	3	
						4965.3	1				
	4941.0	4				4942.7	3				
4931	4924.0	4				4935.1	3				
						4918.0	1				

Qui terminano le misure relative alla parte di spettro visibile dell'azoto che va dal rosso al verde; in altra Nota vengono esposte le misure dal bleu all'ultravioletto.

*Chimica. — Analisi termica di miscele binarie dei cloruri di elementi monovalenti* (<sup>1</sup>). Nota di C. SANDONNINI e P. C. AU-REGGI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In questa Nota vengono esposti i risultati ottenuti esperimentando sei nuove coppie tra i cloruri di litio, sodio potassio, rubidio, argento, tallio (tallosio), che fanno quindi parte della serie già iniziata ed esposta in questi Rendiconti da uno di noi (<sup>2</sup>).

Dai singoli punti di fusione dei componenti, eccettuato il cloruro di rubidio, venne già detto. Del cloruro di rubidio impiegato venne dosato il contenuto in cloro, che fu trovato perfettamente in accordo col calcolato; si poté così escludere un'eventuale presenza di cloruro potassico che avrebbe sensibilmente aumentato la percentuale in cloro.

Il punto di fusione del cloruro di rubidio è dato da Carnelley (<sup>3</sup>) a 710° e da Zemczuzny e Rambach (<sup>4</sup>) a 726°. Dalle curve di raffreddamento il punto di solidificazione del nostro cloruro di rubidio risultò a 716°.

### 1. *Il sistema Li Cl-Tl Cl.*

I due componenti sono completamente miscibili allo stato liquido. La curva di cristallizzazione primaria discende dal punto di solidificazione del cloruro di litio sino a 342°, ad un punto eutettico a circa 62 mol % di cloruro talloso. Le durate eutetiche sono sufficientemente lunghe da ritenere che il cloruro di litio e il cloruro talloso non diano cristalli misti in alcun rapporto.

Vennero sempre impiegati dieci grammi di miscela (Tabella 1<sup>a</sup>, fig. 1).

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(<sup>2</sup>) Questi Rendiconti, 20, 1<sup>o</sup> sem., 457, 758, 1911.

(<sup>3</sup>) Journ. Chem. Soc. 37, 1880.

(<sup>4</sup>) Zeit. f. an. Ch. 65, 403, 1910.

TABELLA 1<sup>a</sup>.

Molecole %/ di Tl Cl	Temperature di cristallizzazione primaria	Temperature eutetiche	Durate in secondi
0	602°	—	—
5	583	343°	25"
10	557	339	30
20	520	343	50
30	480	342	90
40	440	342	100
50	397	342	130
60	350	342	130
70	373	345	90
90	410	340	30
95	420	340	—
100	429	—	—

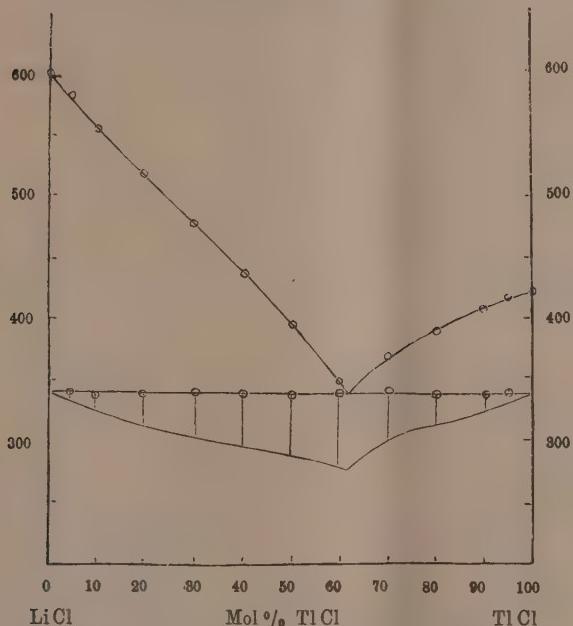


FIG. 1. — Cloruro di litio e cloruro talloso.

2. *Il sistema NaCl - TlCl.*

Vennero impiegati da 10 a 20 grammi di miscela, nelle tabelle le durate eutetiche si riferiscono sempre a dieci grammi. La cristallizzazione primaria si nota con deboli rallentamenti nelle curve di raffreddamento,

così pure gli arresti spettanti alla cristallizzazione eutettica non sono sempre regolari né proporzionali; tuttavia è da ritenersi, dalle durate eutetiche a 10 e 90 mol % di cloruro taloso, che i due componenti non siano miscibili allo stato solido. La miscela eutettica giace circa a 85 mol % di Tl Cl. (Tabella 2<sup>a</sup>, fig. 2).

TABELLA 2<sup>a</sup>.

Molecole % di Tl Cl	Temperatura di cristallizzazione primaria	Temperatura eutettiche	Durata in secondi
0	806°	—	—
10	770	410°	30''
25	711	410	—
40	667	412	50
50	650	415	—
65	570	412	60
70	530	414	—
80	490	412	70
80	430	—	—
85	—	412	100
90	423	412	50
100	429	—	—

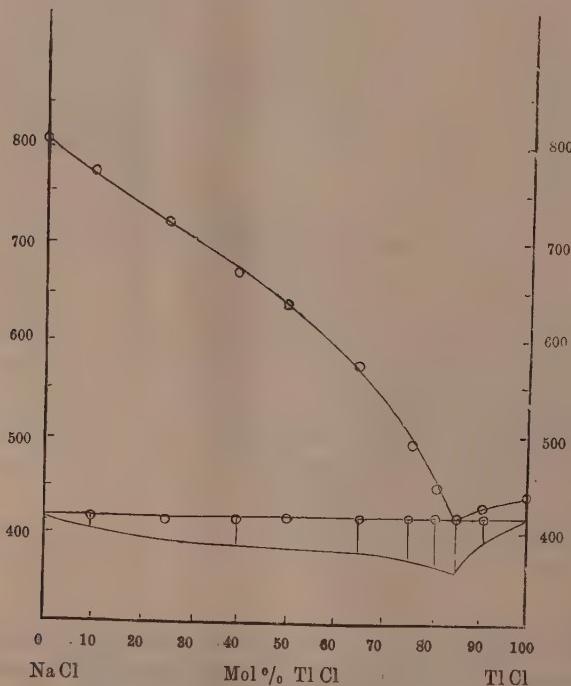


FIG. 2. — Cloruro di sodio e cloruro taloso.

## 3. Il sistema KCl-TlCl.

L'inizio di cristallizzazione di tutte le miscele esperimentate sta fra i punti di solidificazione dei due componenti: si ha formazione di cristalli misti di una sola specie; i componenti sono miscibili in ogni rapporto tanto allo stato liquido quanto allo stato solido. Si poté cogliere con sicurezza la fine di cristallizzazione soltanto dei cristalli misti ricchi in cloruro talloso, che come si vede dalla fig. 3<sup>a</sup> coincide per le miscele a 80 e 90 mol % di Tl Cl col punto di solidificazione del cloruro talloso stesso (Tabella 3<sup>a</sup>, fig. 3<sup>a</sup>).

TABELLA 3<sup>a</sup>.

Molecole %/ di Tl Cl	Inizio della cristallizzazione	Fine della cristallizzazione	Intervallo in gradi
0	776°	—	—
10	742	—	—
20	712	—	—
40	654	—	—
50	616	—	—
60	582	—	—
70	535	—	—
75	525	—	—
80	490	429°	51°
90	470	430	40
100	429	—	—

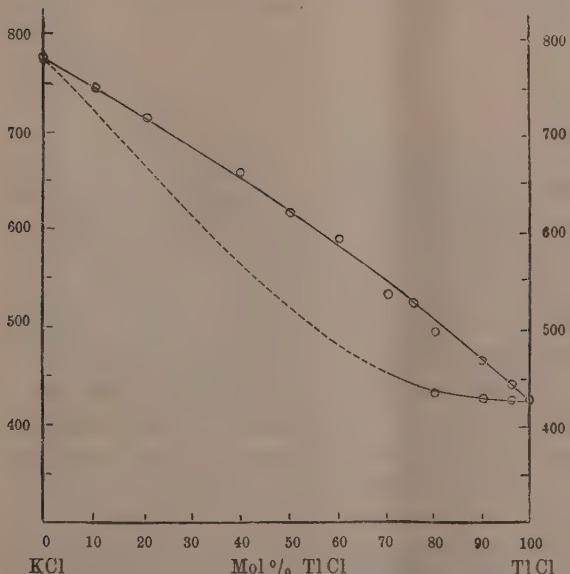


FIG. 3. — Cloruro potassico e cloruro talloso.

Assai verosimilmente è questo un caso simile al sistema bismuto-antimonio esperimentato da Hüttner e Tammann (<sup>1</sup>) e che ritroveremo molto più visibilmente per il sistema Rb Cl - Tl Cl.

#### 4. Il sistema Rb Cl - Ag Cl.

Il sistema è analogo a quello già esperimentato da Zemczuzny (<sup>2</sup>) per i cloruri di argento e potassio. I due componenti danno un semplice eutetico, che giace a 60 mol % di cloruro di argento e a 253° (Tabella 4\*, fig. 4).

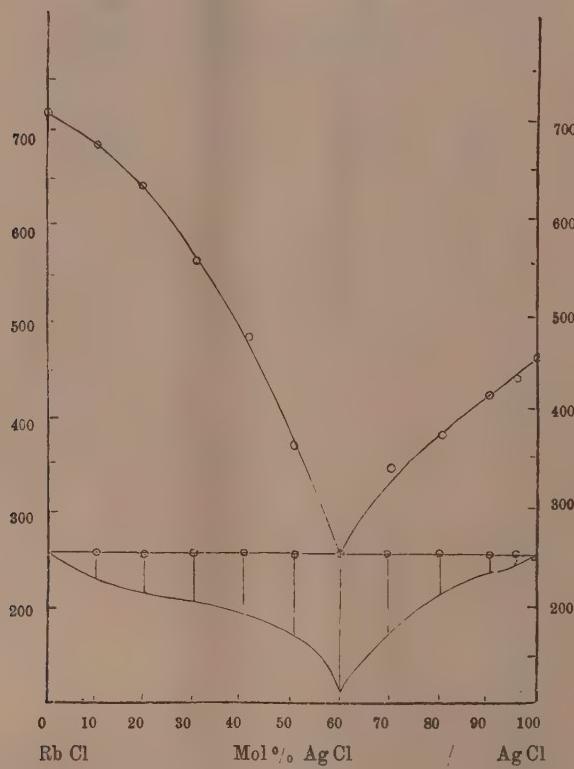


FIG. 4. — Cloruro di rubidio e cloruro d'argento.

(<sup>1</sup>) Zeit. f. an. Ch. 44, 181, 1905.

(<sup>2</sup>) Zeit. f. an. Ch. 57, 267, 1908.

TABELLA 4<sup>a</sup>.

Molecole %/ di Ag Cl	Temperatura di cristallizzazione primaria	Temperature eutetiche	Durate in secondi
0	716°	—	—
10	678	253°	50''
20	628	253	80
30	560	253	100
40	478	253	120
50	365	253	160
60	eut	252	230
70	350	252	180
80	378	253	80
90	415	253	80
95	433	251	20
100	455	—	—

Come nel sistema cloruro potassico - cloruro d'argento i complessi che indubbiamente esistono tra cloruro d'argento e i cloruri alcalini, come lo dimostrano misure di solubilità <sup>(1)</sup> e l'esistenza di un composto  $2\text{CsCl} \cdot \text{AgCl}$  <sup>(2)</sup>, non sono rivelabili per via termica anche nel sistema cloruro di rubidio - cloruro d'argento.

### 5. Il sistema RbCl - TlCl.

Il diagramma che risulta (fig. 5<sup>a</sup>) è analogo a quello ottenuto da Hüttner e Tammaru (loc. cit.) per il sistema bismuto-antimonio. L'intervallo di cristallizzazione delle miscele oltre 50 mol % di cloruro talloso arriva al punto di solidificazione del cloruro talloso e assai probabilmente alla fine di cristallizzazione si deposita cloruro talloso puro. Veri arresti a 429° non si ebbero per nessuna miscela; così assai probabilmente si è in presenza di uno di quei casi, nei quali variando la velocità di raffreddamento, la curva che segna la fine di cristallizzazione può allontanarsi od avvicinarsi alla curva che segna l'inizio di cristallizzazione, e cioè diminuendo la velocità di raffreddamento aumentano i cristalli misti di composizione media come appunto nel sistema bismuto-antimonio (Tabella 5<sup>a</sup>, fig. 5).

<sup>(1)</sup> Abegg, Handb. d. an. Ch. II, 1, 679; Zeit. f. an. Ch. 20, 477, 1899.

<sup>(2)</sup> Wells e Wheeler, Zeit. f. an. Ch. 2, 301, 1892.

TABELLA 5<sup>a</sup>.

Molecole % di Tl Cl	Inizio della cristallizzazione	Fine della cristallizzazione	Intervallo in gradi
0	716°	—	—
10	684	—	—
20	660	—	—
30	636	—	—
40	605	505°	100°
50	559	450	109
60	622	430	—
70	495	429	—
75	475	429	—
80	460	429	—
90	438	429	—
95	432	429	—
100	429	—	—

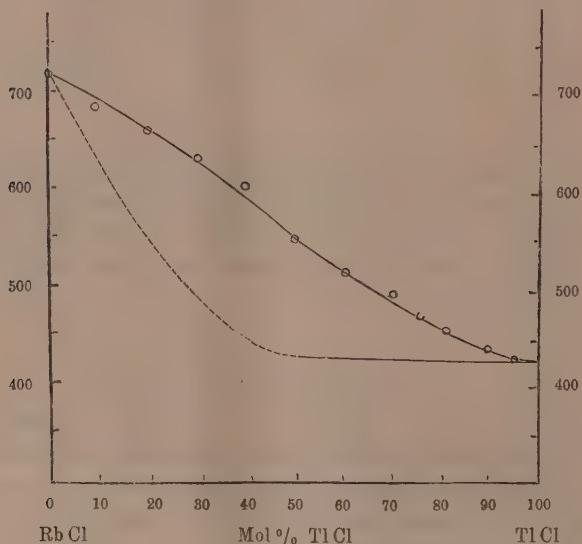


FIG. 5. — Cloruro di rubidio e cloruro talloso.

6. *Il sistema AgCl-TlCl*.

La curva di cristallizzazione primaria dal punto di fusione del cloruro d'argento discende ad un punto eutettico a 210° e a 41 mol % di cloruro talloso per risalire sino a 252° a 60 mol % di TlCl, ove si nota un evidente gomito; indi sale direttamente al punto di solidificazione del cloruro talloso.

Le curve di raffreddamento delle miscele oltre 60 mol % di TlCl hanno, oltre all'inizio di cristallizzazione, un arresto a 252° che ha il suo massimo di durata a 60 mol %. Si rivela così un composto decomponibile alla fusione, che viene così ad avere la composizione 2 AgCl · 3 TlCl. Nel diagramma perpendicolarmente alla orizzontale  $a\ a'$  sono portati i tempi di arresto a 252° (Tabella 6<sup>a</sup>, fig. 6).

TABELLA 6<sup>a</sup>.

Molecole % di TlCl	Temperatura di cristallizzazione primaria	1 <sup>o</sup> arresto	Durata in secondi	2 <sup>o</sup> arresto	Durata in secondi
0	455°	—	—	—	—
5	430	—	—	210°	—
10	416	—	—	210	30''
25	340	—	—	210	70
40	221	—	—	210	150
45	222	—	—	210	80
50	285	—	—	208	40
55	249	—	—	208	20
60	253	253°	140''	209	—
65	284	252	100	—	—
66.5	297	252	90	—	—
70	321	252	80	—	—
75	345	250	40	—	—
90	402	249	20	—	—
100	429	—	—	—	—

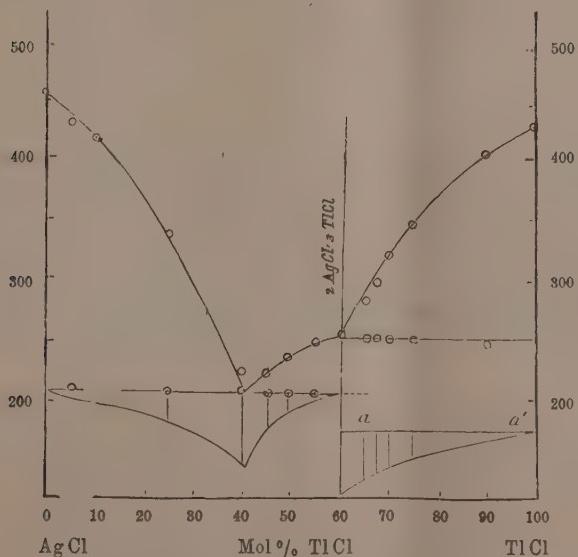


FIG. 6. — Cloruro d'argento e cloruro talloso.

È degno di nota che, non ostante la grande analogia che risulta tra i cloruri di potassio, di rubidio e di tallio, sia solamente rivelabile un composto tra i cloruri di argento e talloso, anche per il fatto che, dato che questo composto corrisponda ai complessi che si ammettono in soluzione tra i cloruri alcalini e il cloruro d'argento, ove  $\text{Ag}^+$  debolmente elettro-affine entra nella parte neutra della molecola; essendo  $\text{K}^+$  ed  $\text{Rb}^+$  più fortemente elettro-affini di  $\text{Tl}^+$ , i complessi tra cloruro d'argento e i cloruri dei due primi, dovrebbero essere molto più stabili che non tra il cloruro talloso e cloruro d'argento.

Riassumendo:

1. Il cloruro di rubidio dà col cloruro d'argento un semplice eutettico.
2. Il cloruro di tallio dà coi cloruri di litio e sodio semplici eutettici; coi cloruri di potassio e di rubidio cristalli misti in rapporti assai vasti. Col cloruro d'argento il cloruro di tallio dà un composto di composizione  $2\text{AgCl} \cdot 3\text{TlCl}$ .

Esperienze già condotte a termine per il sistema  $\text{RbCl}-\text{CuCl}$  condussero ad accertare l'esistenza di due composti  $2\text{RbCl}-\text{CuCl}$  e  $2\text{RbCl} \cdot 3\text{CuCl}$ , pei quali si trovò perfetta identità con quelli preparati per via umida, mentre che pel sistema cloruro potassico-cloruro rameoso si rivelò un solo composto  $2\text{KCl} \cdot \text{CuCl}$ . Sembra così esistere una graduale maggior tendenza a combinarsi col cloruro rameoso dal cloruro di potassio ai cloruri degli omologhi superiori; non pare quindi privo di interesse lo studio del sistema  $\text{CsCl}-\text{CuCl}$ , tra i quali sono già noti diversi composti, preparati per via umida; studio che verrà subito iniziato.

*Chimica. — Analisi termica di miscele binarie di cloruri di elementi bivalenti.* Nota di CARLO SANDONNINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle superficie razionali reali.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

In questa Nota espongo i risultati di alcune mie ricerche sulle superficie razionali reali. Essi riguardano in principal modo la classificazione di queste superficie fatta dal punto di vista delle trasformazioni birazionali reali, il numero delle falde, e la relazione fra questo numero e un invariante della superficie (<sup>1</sup>).

Chiamo, secondo l'uso, *reale*, una superficie algebrica di un  $S_r$  le cui equazioni siano a coefficienti reali. Se questa superficie è anche *razionale*, le coordinate de' suoi punti sono, com'è noto, esprimibili in funzioni razionali di due parametri, e ciò si può fare in infiniti modi. Tuttavia è facile convincersi, anche su esempi assai semplici, che la realtà della superficie non porta necessariamente di conseguenza la realtà nei coefficienti delle funzioni razionali suddette; in altre parole che la *rappresentazione piana* della superficie non si può sempre eseguire in maniera reale. Se si chiama *reale* una trasformazione fra due superficie  $F$ ,  $F'$  la quale abbia equazioni a coefficienti reali, ciò equivale a dire che fra una superficie razionale reale ed un piano reale non si può sempre stabilire una trasformazione birazionale reale.

Anzi si può dir subito che tale possibilità è senz'altro esclusa per le superficie con più di una falda; attesochè un carattere delle trasformazioni reali è quello di non alterare il numero delle falde (inteso in senso proiettivo) di una superficie. Poichè, come si vedrà, le superficie razionali reali possono avere un numero qualunque, anche nullo (<sup>2</sup>), di falde, questo numero si presenterà come un invariante rispetto alle trasformazioni birazionali reali.

Un primo criterio, assai importante, che serve di guida alla classificazione, è fornito dalla considerazione dei *sistemi lineari reali* (<sup>3</sup>) a cui si arriva sopra una delle nostre superficie mediante il procedimento di *successiva aggiunzione* applicato a partire da un sistema lineare reale in condizioni generiche. Usando del teorema di Castelnuovo (<sup>4</sup>) relativo ai sistemi

(<sup>1</sup>) I procedimenti dimostrativi saranno sviluppati completamente in una Memoria di prossima pubblicazione.

(<sup>2</sup>) Basta pensare alla sfera (comunemente detta *imaginaria*),  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ .

(<sup>3</sup>) Il significato, del resto ovvio, che ha in questo caso l'appellativo *reale*, si vedrà meglio in seguito.

(<sup>4</sup>) Appendice alla Memoria di Enriques, *Sui piani doppi di genere 1* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL). 1896]. L'enunciato è al n. 7 della Memoria.

lineari che son deducibili, nel piano, per successiva aggiunzione, da un sistema lineare generico, si perviene, con qualche elaborazione, al seguente teorema:

*Sopra una superficie razionale reale, esiste sempre qualche sistema lineare reale appartenente all'uno o all'altro dei seguenti tipi:*

a) *Fascio di curve razionali;*

b) *Rete di grado 2 di curve ellittiche* (riferibile alla rete delle cubiche piane per 7 punti base);

c) *Sistema  $\infty^3$  di grado 4 e genere 2* (riferibile al sistema delle sestiche piane per 8 punti base doppi).

Non è però escluso che una delle nostre superficie non possa contenere sistemi di due o anche di tutti e tre i tipi; tuttavia, per varie ragioni, di cui alcune si vedranno in seguito, torna opportuno stabilire subito una distinzione delle superficie stesse in *tre famiglie*, seguendo in certo modo l'ordine di complessità dei sistemi lineari appartenenti ai tipi suddetti. La distinzione si eseguirà ponendo in una I<sup>a</sup> famiglia tutte le superficie che contengono qualche sistema  $\alpha$ ); in una II<sup>a</sup> tutte quelle che non contengono sistemi  $\alpha$ ), ma contengono invece qualche sistema  $\beta$ ); infine in una III<sup>a</sup> famiglia quelle su cui non esistono che sistemi  $\gamma$ )<sup>(1)</sup>. Sopra una data superficie F si chiamerà *caratteristico* uno qualunque fra i sistemi lineari appartenenti a quello fra i tipi suddetti dalla cui esistenza dipende, per F, la proprietà di appartenere ad una delle predette famiglie. Così per le superficie della I<sup>a</sup> famiglia saranno caratteristici i sistemi  $\alpha$ ), per la II<sup>a</sup> i sistemi  $\beta$ ), ecc.

È ovvio che la distinzione in tre famiglie ha valore di fronte alle trasformazioni birazionali reali, attesochè esse mutano sistemi lineari reali in sistemi lineari pure reali.

Fatto questo primo passo, riesce più agevole l'uso d'una seconda considerazione, veramente fondamentale per tutto ciò che riguarda lo studio degli enti algebrici reali (punti, curve, sistemi lineari, ecc.) d'una superficie razionale reale. La realtà di questi enti è caratterizzata dalla proprietà di esser mutati in se stessi dalla *trasformazione di coniugio* della superficie, la quale è ivi subordinata dalla trasformazione di coniugio dello S, ambiente. Quando si passa dalla superficie alla sua rappresentazione piana, la trasformazione di coniugio si rispecchia in una trasformazione *involutoria* del piano le cui equazioni si scrivono ponendo le coordinate di un punto eguali a funzioni razionali invertibili dei valori complessi coniugati di quelli delle coordinate del punto corrispondente. Risulta subito da ciò, che queste trasformazioni sono prodotti di trasformazioni birazionali per il coniugio (del piano): esse si possono dunque denominare *trasformazioni antibirazionali*, esten-

<sup>(1)</sup> Questa distinzione presenta qualche analogia con quella stabilita da Enriques nella Memoria: *Sulle irrazionalità aritmetiche ecc.* Math. Annalen, Bd. 49, n. 6.

Tendo così il concetto e la denominazione di *antiproiettività* introdotti dal Segre.

Una superficie razionale reale è rappresentabile sopra un piano reale  $\pi$  in infiniti modi: ognuno di essi dà luogo ad una trasformazione antibirazionale *involutoria* che si dirà *collegata* alla rappresentazione piana che si considera. Tuttavia due trasformazioni  $T, T'$  relative a due superficie  $F, F'$  birazionalmente identiche dal punto di vista reale (e quindi eventualmente relative alla stessa superficie) sono riducibili una all'altra per trasformazioni birazionali del piano, cioè, con locuzione abbreviata, sono *simili*: e reciprocamente se  $T, T'$  sono simili, due qualunque superficie  $F, F'$  di cui le  $T, T'$  rappresentino il coniugio<sup>(1)</sup>, sono identiche per trasformazioni birazionali reali.

Questa osservazione mostra come il problema di classificare le superficie razionali reali in relazione alle trasformazioni birazionali reali, equivalga a quello di classificare le trasformazioni antiorazionali involutorie rispetto alla similitudine. Tenendo conto del fatto che queste trasformazioni lasciano unito uno dei sistemi  $\alpha, \beta, \gamma$ , si arriva al seguente teorema:

*Le trasformazioni antibirazionali involutorie del piano, sono riducibili, per trasformazioni quadratiche, ai seguenti tipi, irriducibili fra loro e costati dal massimo numero di punti fondamentali:*

- a) *Coniugio;*
- b) *Trasformazioni antiquadratiche prive di elementi uniti;*
- c) *Trasformazioni d'ordine  $n+1$  ( $n > 1$ ) con un punto fondamentale  $m$ -plo  $O$ , e  $2m$  punti fondamentali semplici  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 2m$ ), disposti fra loro o infinitamente vicini ad  $O$  in direzioni distinte e aventi come rette fondamentali omologhe le rette  $p_i = OP_i$ ;*
- d) *Trasformazioni di 8° ordine con 7 punti tripli  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ), avuti ordinatamente per omologhe le cubiche  $K_i$  ( $K_i = (P_1^3 P_2 \dots P_7)$ );*
- e) *Trasformazioni di 17° ordine con 9 punti sestupli  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), avuti ordinatamente per omologhe le sestiche  $K_i$  ( $K_i = (P_1^6 P_2^3 \dots P_9)$ ).*

La classificazione stabilita da questo teorema ha molte analogie con quella relativa alle trasformazioni birazionali involutorie che deriva dalle ricerche di Bertini, S. Kantor, Castelnuovo, Wiman; ma offre anche alcune singolari differenze, suscettibili di interessanti interpretazioni. Notiamo fra queste il caso b) che non si presenta per le trasformazioni quadratiche involutorie le quali sono tutte riducibili all'omologia armonica<sup>(2)</sup>; e i casi d), e)

<sup>(1)</sup> Date al arbitrio una  $T$  involutoria si può sempre costruire una  $F$  di cui  $T$  rappresenti il coniugio.

<sup>(2)</sup> Bertini. *Sopra una classe di trasformazioni universali involutorie* [Annali di Matematica, serie II, T. VIII (1877) pp. 11-23] n. 4, pag. 14; n. 15, pag. 19.

(\*) Con una proiettività *imaginaria* o identica.

nei quali l'esistenza delle trasformazioni richiede, a differenza di quanto succede per le analoghe trasformazioni birazionali, particolari legami fra i punti fondamentali. Affinchè un gruppo di 7 (o resp. 8) punti possa dar origine ad una trasformazione d) [o e)], è necessario e sufficiente che esista un'antiproiettività involutoria in cui quei punti siano uniti, cioè che quel gruppo sia trasformabile proiettivamente (<sup>1</sup>) in un gruppo di punti *reali*.

Tutte le superficie con *una falda* danno luogo a trasformazioni riducibili al coniugio e quindi son trasformabili realmente in un piano reale. Le superficie prive di falde conducono invece tutte al caso b) che è l'unico nel quale non vi siano elementi uniti; e poichè tutte le trasformazioni b) sono simili fra loro, così tutte le superficie prive di falde sono equivalenti dal nostro punto di vista; in particolare son tutte trasformabili in una quadrica reale priva di punti reali. Trasformando il coniugio di tale quadrica mediante la proiezione della quadrica stessa da un suo punto sopra un piano reale, si ottiene precisamente una trasformazione b).

Lasciando da parte i due casi di cui s'è fatto cenno e che si riferiscono a superficie della I<sup>a</sup> famiglia, gli altri tre casi c), d), e) corrispondono ordinatamente alle tre famiglie, e legittimano chiaramente la distinzione stabilita. In questi tre casi la determinazione delle falde dipende dall'esistenza di particolari sistemi lineari reali che conducono a rappresentare ordinatamente le nostre superficie:

A) *Sopra un piano doppio reale con curva di diramazione d'ordine  $2n$  dotata d'un punto  $2n-2$ -plo, irriducibile e priva di punti doppi;*

B) *Sopra un piano doppio reale con quartica di diramazione di genere 3;*

C) *Sopra un cono quadrico doppio reale con sestica di diramazione di genere 4.*

È quasi superfluo avvertire che per *superficie rappresentabile sopra un piano doppio reale* intendiamo una superficie che contenga una rete *reale* di grado 2; e che la curva di diramazione del piano doppio è in questo caso una curva *reale*. La rappresentazione suddetta permette subito di dedurre, dal numero delle regioni in cui resta diviso il piano (o il cono) dai rami reali della curva di diramazione, il numero delle falde della superficie (<sup>1</sup>); si trova così che nei casi c), d), e) esso è rispettivamente eguale ad  $m$ , 4, 5.

Per trovare un legame fra questo numero e un invariante della superficie basta partire dalla proprietà, posseduta da tutte le superficie *con più di una falda*, d'esser rappresentabili sopra un piano *privo di curve fondamentali semplici*, cioè di curve che siano trasformabili in un punto me-

(<sup>1</sup>) Nel caso C) bisogna prima procurarsi la relazione fra il numero dei rami reali della sestica e quello dei piani tritangenti reali.

diantre trasformazione birazionale del piano. Quando la rappresentazione di una superficie  $F$  si sia ridotta a godere di questa proprietà, il numero dei punti fondamentali risulta indipendente dal procedimento di riduzione ed eguale ad  $I + 1$ , se  $I$  è l'invariante di Zeuthen-Segre della superficie. La mancanza di curve fondamentali semplici porta di conseguenza che la trasformazione antibirazionale involutoria  $T$ , relativa alla rappresentazione considerata, abbia meno di  $I + 1$  punti fondamentali; ne segue che il numero  $I + 1$  relativo a qualunque trasformata reale di  $F$  non può scendere al disotto del minimo numero di punti fondamentali a cui è riducibile la  $T$ ; e si prova senza difficoltà che tale limite è raggiunto.

In definitiva si ottiene il seguente teorema:

*Il valore dell'invariante di Zeuthen-Segre inerente alle superficie razionali reali aventi uno stesso numero  $m$  di falde, e appartenenti ad una medesima famiglia, non può discendere al disotto di un minimo che si raggiunge effettivamente con una opportuna trasformazione birazionale reale. Il valor minimo a cui si allude è dato dalla tabella seguente:*

*Per la I<sup>a</sup> famiglia  $I = 2m$  se  $m > 1$ ,  $I = -1$  se  $m = 1$ ,  $I = 0$  se  $m = 0$ ;*

*Per la II<sup>a</sup> famiglia  $I = 6$ ,  $m = 4$ ;*

*Per la III<sup>a</sup> famiglia  $I = 7$ ,  $m = 5$ .*

La costruzione effettiva di superficie, proiettivamente determinate, con dato numero di falde e col valor minimo di  $I$ , non presenta alcuna seria difficoltà.

Ad ogni classe, cioè ad ogni insieme di superficie razionali equivalenti per trasformazioni birazionali reali è legato un certo numero di moduli reali. La ricerca di questi, ossia delle condizioni d'identità birazionale reale di due superficie razionali reali  $F, F'$ , si fa tenendo conto del fatto che le trasformazioni reali mutano uno nell'altro due sistemi caratteristici. Approfondendo lo studio di questi sistemi e delle loro proprietà (sempre nel caso  $m > 1$ , perchè per  $m = 0, 1$  non vi sono moduli) si conclude che sono moduli:

*Per la I<sup>a</sup> famiglia i  $2m - 3$  birapporti reali che sono invarianti proiettivi del gruppo delle  $2m$  rette  $p_i$  ( $i = 1, \dots, 2m$ ), le quali, a meno d'una proiettività, si possono ritenere reali;*

*Per la II<sup>a</sup> e III<sup>a</sup> famiglia i 6 o resp. 8 invarianti proiettivi reali del gruppo dei punti fondamentali della relativa trasformazione **d**) od **e**), che, come è noto, si posson supporre reali.*

Si aggiunga che, nel caso della I<sup>a</sup> famiglia, ad ogni gruppo proiettivamente determinato delle  $2m$  rette  $p_i$ , corrispondono due classi di superficie, ciascuna delle quali è legata ad uno dei due segni d'un polinomio caratteristico nella rappresentazione analitica della relativa trasformazione **c**).

Infine lo studio dei sistemi caratteristici aiuta notevolmente la ricerca delle trasformazioni birazionali reali in sè d'una superficie razionale reale. Si trova allora che le superficie della III<sup>a</sup> famiglia *a moduli generali* non ne possiedono affatto, mentre quelle della II<sup>a</sup> famiglia possiedono un gruppo che si può generare mediante trasformazioni appartenenti a due tipi ben determinati. Nel caso della I<sup>a</sup> famiglia il problema presenta maggiori difficoltà e rimane ancora insoluto.

### CORRISPONDENZA

Il Segretario MILLOSEVICH dà comunicazione del telegramma fatto inviare da S. M. il RE all'Accademia in ringraziamento degli auguri a S. M. trasmessi dalla Presidenza.

Senatore prof. BLASERNA, presidente della R. Accademia dei Lincei — Roma.

S. M. il RE ricambia con sincero compiacimento il gentile saluto da lei oggi rivolto a nome di codesta insigne Accademia e risponde con cordiale grazie alla patriottica manifestazione.

MATTIOLI.

Lo stesso SEGREARIO aggiunge che in esecuzione della unanime deliberazione presa dall'Accademia dei Lincei nella seduta del 5 novembre corr., d'inviare ai nostri soldati combattenti in Africa plausi ed auguri, il Presidente dell'Accademia mandava al generale CANEVA il seguente telegramma:

Generale CANEVA Comandante Esercito Africa — Tripoli.

Accademia Lincei sua prima adunanza applaude patriottismo valore nostro esercito nostra armata Africa, augura nuovi trionfi apportatori civiltà regioni un giorno dominio Impero Romano.

BLASERNA.

A questo telegramma il generale CANEVA rispondeva nel modo seguente:

Senatore BLASERNA, Accademia Lincei — Roma.

Fieri del saluto vostro ringraziamo commosso gl'illustri accademici italiani e il loro degno Presidente.

CANEVA.

E. M.



